Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Benedetto Scimemi

Un' osservazione sui gruppi finiti dotati di auto-morfismi di ordine p^n privi di coincidenze

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 509–510.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_509_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Matematica. — *Un'osservazione sui gruppi finiti dotati di automorfismi di ordine p^n privi di coincidenze.* Nota di BENEDETTO SCIMEMI, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — Let ρ be a fixed-point-free automorphism of order p^n (p odd prime) acting on the finite solvable group G. If $N_{(i)} = [G, \langle\rho^{p^{n-i}}\rangle]$ then $1 = N_{(0)} \leq \cdots \leq N_{(i-1)} \leq \leq N_{(i)} \leq \cdots \leq N_{(n)} = G$ is a normal chain with nilpotent factors $N_{(i)}/N_{(i-1)}$.

Il Teorema che segue è una variante di un risultato di F. Gross [2] sulla lunghezza di Fitting di un gruppo dotato di un automorfismo privo di coincidenze:

Sia ρ *un automorfismo di ordine* p^n *(*p *primo dispari) che opera senza coincidenze sul gruppo finito risolubile* G. *Se* $N_{(i)} = [G, \langle\rho^{p^{n-i}}\rangle]$ *allora* $1 = N_{(0)} \leq \cdots \leq N_{(i-1)} \leq N_{(i)} \leq \cdots \leq N_{(n)} = G$ *è una catena di sottogruppi normali in* G, *a quozienti* $N_{(i)}/N_{(i-1)}$ *nilpotenti.*

Dimostrazione. Per definizione, $G/N_{(i)}$ è il massimo quoziente di G su cui $\rho^{p^{n-i}}$ induce l'identità; allora ρ induce su $G/N_{(i)}$ un automorfismo di ordine p^{n-i}, privo di coincidenze. Procedendo per induzione, basterà dunque provare che $N_{(1)}$ è nilpotente. Posto $\varepsilon = \rho^{p^{n-1}}$, il sottogruppo in questione è $N_{(1)} = [G, \langle\varepsilon\rangle] = \langle x^{-1} x^{\varepsilon} ; x \in G\rangle$. Sia G un controesempio di ordine minimo. Poiché ρ è privo di coincidenze, p non divide l'ordine $|G|$. Allora è noto che $N_{(1)} = [N_{(1)}, \langle\varepsilon\rangle]$ e dunque, per la minimalità, $G = N_{(1)}$. Se $M = M^{\rho} \neq 1$ è un sottogruppo normale di G, si ha $G/M = \bar{G} = [\bar{G}, \langle\varepsilon\rangle]$ e dunque $\bar{G}$ è nilpotente. Allora G ha un unico sottogruppo normale ρ–invariante minimo, che è un q–gruppo, perché G è risolubile. Ne segue che il q–sottogruppo di Sylow di G, sia Q, contiene il suo centralizzante. Per il Teorema 2 di [2], ε è identico su G/Q, e dunque G = Q, nilpotente.

Si ottiene, in particolare, il risultato citato: la lunghezza di Fitting di G non supera n. Sarebbe interessante sapere se la classe di nilpotenza di $N_{(i)}/N_{(i-1)}$ è limitata da una funzione di p (ciò avviene per $i = n$); ciò comporterebbe una limitazione per la lunghezza derivata di G. Illustriamo il Teorema applicandolo ad un caso particolare:

Sia G *un gruppo finito (risolubile) dotato di un automorfismo di ordine* 9, *privo di coincidenze. Allora* $G_3 = [G, G, G]$ *è nilpotente.*

Qui infatti $N_{(1)} = \langle x^{-1} x^{\rho^3} ; x \in G\rangle$, e su $G/N_{(1)}$ ρ ha ordine 3. Per un classico risultato ([1]) $G/N_{(1)}$ ha classe ≤ 2, e dunque $G_3 \leq N_{(1)}$. La congetturata limitazione per la classe di $N_{(1)}$ comporterebbe, per k opportuno,

(*) Nella seduta del 14 aprile 1973.

$(G_3)_k = 1$ per ogni siffatto G. Ciò sarebbe in analogia con il caso in cui ρ ha ordine 4 e risulta $(G_2)_4 = 1$ (cfr. [1] e ref.).

Osserviamo infine che per $p = 3$ l'ipotesi di risolubilità si può omettere, essendo già garantita dalla seguente osservazione:

Se un 3-gruppo di automorfismi A *agisce senza coincidenze* ($C_G(A) = 1$) *sul gruppo finito* G, *allora* G *è risolubile.*

Ciò è immediata conseguenza del recente risultato di J. Thompson sui 3′-gruppi semplici ([3]); infatti un minimo controesempio è un prodotto diretto $G = S_1 \times \cdots \times S_r$ con gli S_j semplici isomorfi, e dunque del tipo di Suzuki; inoltre A opera sugli S_j transitivamente, e dunque r è una potenza di 3. Ma allora ([1]) $|G| = |S_j|^r \equiv |S_i| \equiv 2 \pmod{3}$, mentre $C_G(A) = 1$ comporta $|G| \equiv 1 \pmod{3}$, una contraddizione.

Bibliografia

[1] N. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, N. Y. (1969).

[2] F. Gross, *Solvable groups admitting a fixed-point-free automorphism of prime power order*, « Proc. A.M.S. », *17*, 1440–1446 (1966).

[3] J. Thompson, *Simple 3′-groups*, « Symposia Mathematica » (1973).