
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GEORGES LE CALVÉ, RADU THEODORESCU

**Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à
temps continu. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.3, p. 434–440.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_3_434_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Calcolo delle probabilità. — *Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes à temps continu* (*). Nota I di GEORGES LE CALVÉ e RADU THEODORESCU, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Ci proponiamo di generalizzare nel caso del tempo continuo la nozione di sistema aleatorio con vincoli completi, eliminandone tutti gli aspetti deterministici. In maniera più precisa, si costruiscono dei sistemi aleatori generalizzati con vincoli completi di tempo continuo, dove la regola deterministica di trasformazione degli stati interiori è rimpiazzata da una regola aleatoria definita con una probabilità di transizione. Si insiste soprattutto sulle equazioni integro-differenziali associate e sulla soluzione di tali equazioni. La costruzione è basata sull'idea già utilizzata nel caso del tempo discreto [4].

Nous nous sommes posés le problème de savoir ce que pourrait être l'extension au temps continu d'un système aléatoire à liaisons complètes (en abrégé s.a.l.c.). Le problème n'est pas nouveau. Déjà O. Onicescu [6] et quelques autres après lui avaient tenté de le résoudre, essentiellement pour les chaînes OM ⁽¹⁾ (dans [7] pour les chaînes OM multiples, dans [8] pour les chaînes OM avec un espace quelconque d'états ⁽²⁾, et dans [5] pour les chaînes OM généralisées au sens des distributions), tandis que M. Iosifescu [2] considère des s.a.l.c. quelconques.

Essayons de voir, d'une manière intuitive, comment se pose le problème.

Soient $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, deux suites de variables aléatoires telles que le passage de (w_n, x_n) à w_{n+1} soit déterministe et le passage de w_n à x_n donné par une probabilité de transition. Si nous voulons examiner le cas du temps continu, il est clair que le passage de n à $n + 1$ de manière déterministe n'a plus aucun sens.

Trois voies s'ouvrent alors à nous. 1) Considérer que le passage de w_t à $w_{t+\Delta t}$, où Δt est un infiniment petit, est déterministe; c'est ce que fait essentiellement O. Onicescu dans [6]. Il obtient des équations différentielles portant sur les seules variables aléatoires $(x_t)_{t \in T}$, où T est un intervalle de la droite réelle. Ces équations sont analogues à celles données par A. N. Kolmogorov pour les processus de Markov, la différence étant que le noyau qui y intervient dépend du passé. 2) Considérer que le passage de $(w_t, (x_r)_{t \leq r < s})$ à w_s est déterministe, c'est-à-dire utiliser des « épaisseurs »; c'est ce que fait M. Iosifescu dans [2]. Il obtient essentiellement des équations integro-diffé-

(*) Recherche supportée par la subvention A-7223 du Conseil National de Recherche du Canada.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1973.

(1) C'est la notion de chaîne à liaisons complètes, due à O. ONICESCU et G. MIHOC (pour détails, voir [3], où elles sont appelées chaînes OM). Cette notion est à l'origine de celle de s.a.l.c., due à M. IOSIFESCU (voir Définition 2.1.1 [3], p. 63).

(2) Quelques propriétés ergodiques ont été indiqués dans [9].

rentielles pour un processus de Markov associé à un pseudo-s.a.l.c. 3) Considérer que le passage de (w_t, x_t) à w_s est aléatoire, ce qui se généralise très bien au cas continu; mais on a alors affaire à un système aléatoire généralisé à liaisons complètes (en abrégé s.a.g.l.c.) tel que nous l'avons décrit pour le temps discret dans [4]. Autrement dit, l'extension au cas continu d'un s.a.l.c. serait un s.a.g.l.c.

Nous construirons donc des s.a.g.l.c. à temps continu, où la règle déterministe de transformation des états intérieurs ⁽³⁾ est remplacée par une règle aléatoire définie par une probabilité de transition. Nous insisterons surtout sur les équations intégral-différentielles qui leur sont associées, et sur la résolution de ces dernières.

1. DÉFINITIONS

1.1. Soit T un ensemble d'indices, que l'on prendra, pour fixer les idées, comme une partie de la droite réelle R . Pour chaque $t \in T$, soient $({}^tW, {}^t\mathcal{W})$ et $({}^tX, {}^t\mathcal{X})$ deux espaces mesurables, ${}^t\Pi^s$ une probabilité de transition de $({}^tW \times {}^tX, {}^t\mathcal{W} \otimes {}^t\mathcal{X})$ dans $({}^sW, {}^s\mathcal{W})$ pour tout $t, s \in T, t \leq s$, et ${}^tP^s$ une probabilité de transition de $({}^tW, {}^t\mathcal{W})$ dans $({}^sX, {}^s\mathcal{X})$ pour tout $t, s \in T, t \leq s$. Nous supposons de plus que ${}^t\Pi^s$ et ${}^tP^s$ sont liées par les relations de compatibilité

$$(1.1) \quad {}^t\Pi^s((w, x); A) = \int_{{}^rW \times {}^rX} {}^t\Pi^r((w, x); dz') {}^rP^s(w'; dx') {}^r\Pi^s((w', x'); A)$$

pour tout $t < r < s$, et

$$(1.2) \quad {}^tP^s(w; B) = \int_{{}^tX \times {}^rW} {}^tP^t(w; dx) {}^t\Pi^r((w, x); dz') {}^rP^s(w'; B)$$

pour tout $t < r \leq s$. Ces deux relations joueront par la suite le même rôle que celle de Chapman-Kolmogorov pour le processus de Markov.

DÉFINITION 1.1. — L'ensemble $\{({}^tW, {}^t\mathcal{W}), ({}^tX, {}^t\mathcal{X}), {}^t\Pi^s, {}^tP^s, t, s \in T, t \leq s\}$ d'espaces mesurables et de probabilités de transition, liées par les relations (1.1) et (1.2), est appelé s.a.g.l.c. (à temps continu).

DÉFINITION 1.2. — Un s.a.g.l.c. $\{({}^tW, {}^t\mathcal{W}), ({}^tX, {}^t\mathcal{X}), {}^t\Pi^s, {}^tP^s, t, s \in T, t \leq s\}$ est appelé *homogène* si $({}^tW, {}^t\mathcal{W}) = (W, \mathcal{W}), ({}^tX, {}^t\mathcal{X}) = (X, \mathcal{X}), {}^t\Pi^s = \hat{\Pi}^{s-t}, {}^tP^s = \hat{P}^{s-t}$ pour tout $t, s \in T$ et $t \leq s$.

Un s.a.g.l.c. homogène sera noté $\{(W, \mathcal{W}), (X, \mathcal{X}), \hat{\Pi}^r, \hat{P}^r, r \geq 0\}$.

Convenons de poser par la suite ${}^t\Pi^t((w, x); A) = {}^t\Pi((w, x); A)$ et ${}^tP^t(w; B) = {}^tP(w; B)$ pour tout $t \in T$ et supposons que nous ne connaissions

(3) Terminologie empruntée à la théorie mathématique de l'apprentissage.

de la famille ${}^tP^s$ que les tP . Nous définissons ${}^tP^s$ par

$$(1.3) \quad {}^tP^s(w; B) = \int_{{}^tX \times {}^sW} {}^tP(w; dx) {}^t\Pi^s(\langle w, x \rangle; dw') {}^sP(w; B)$$

pour tout $t < s$. Il est clair que ${}^tP^s$, défini par (1.3) vérifie (1.2) et que donc, pour définir un s.a.g.l.c., il nous suffit de connaître les éléments suivants: $\{({}^tW, {}^t\mathfrak{W}), ({}^tX, {}^t\mathfrak{X}), {}^t\Pi^s, {}^tP, t, s \in T, t \leq s\}$.

1.2. Considérons la probabilité de transition de $({}^tW, {}^t\mathfrak{W})$ dans $({}^sW, {}^s\mathfrak{W})$ définie par

$$(1.4) \quad {}^tQ^s(w; A) = \int_{{}^tX} {}^tP(w; dx) {}^t\Pi^s(\langle w, x \rangle; A)$$

pour tout $t < s$; pour simplifier, prenons ${}^tQ^t$ définie par la même formule (1.4) pour $t = s$. En vertu de (1.1), il résulte que ${}^tQ^s$ vérifie la relation

$$(1.5) \quad {}^tQ^s(w; A) = \int_{{}^rW} {}^tQ^r(w; dw') {}^rQ^s(w'; A)$$

pour tout $t < r < s$, c'est-à-dire la relation de Chapman-Kolmogorov. Par conséquent, ${}^tQ^s$ représente la probabilité de transition d'un processus de Markov.

DÉFINITION 1.3. - $\{({}^tW, {}^t\mathfrak{W}), {}^tQ^s, t, s \in T, t \leq s\}$ est appelé le *processus non observable* ⁽⁴⁾ associé au s.a.g.l.c. $\{({}^tW, {}^t\mathfrak{W}), ({}^tX, {}^t\mathfrak{X}), {}^t\Pi^s, {}^tP^s, t, s \in T, t \leq s\}$.

Exprimons maintenant ${}^t\Pi^s$ et ${}^tP^s$ en utilisant ${}^tQ^s$; (1.1) devient

$$(1.6) \quad {}^t\Pi^s(\langle w, x \rangle; A) = \int_{{}^rW} {}^t\Pi^r(\langle w, x \rangle; dw') {}^rQ^s(w'; A)$$

pour tout $t < r < s$. De même (1.2) peut s'écrire

$$(1.7) \quad {}^tP^s(w; B) = \int_{{}^rW} {}^tQ^r(w; dw') {}^rP^s(w'; B)$$

pour tout $t < r \leq s$. Evidemment, pour $r = s$ nous obtenons

$$(1.8) \quad {}^tP^s(w; B) = \int_{{}^sW} {}^tQ^s(w; dw') {}^sP(w'; B);$$

(1.8) n'est qu'une autre forme de la relation (1.3).

(4) Voir la note (3).

1.3. Examinons ensuite la probabilité de transition ${}^tC^s$ de $({}^tW \times {}^tX, {}^t\mathcal{V} \otimes {}^t\mathcal{X})$ dans $({}^sW \times {}^sX, {}^s\mathcal{V} \otimes {}^s\mathcal{X})$, définie par

$$(1.9) \quad {}^tC^s((w, x); D) = \int_{{}^sW \times {}^sX} {}^t\Pi^s((w, x); dw') {}^sP(w'; dx') \chi_D(w', x'),$$

où χ_D est l'indicatrice de $D \in {}^s\mathcal{V} \otimes {}^s\mathcal{X}$, pour tout $t \leq s$. En vertu de (1.1) et de (1.9), il résulte que ${}^tC^s$ vérifie la relation

$$(1.10) \quad {}^tC^s((w, x); D) = \int_{{}^rW \times {}^rX} {}^tC^r((w, x); d(w', x')) {}^rC^s((w', x'); D)$$

pour tout $t < r < s$, c'est-à-dire la relation de Chapman-Kolmogorov.

DÉFINITION 1.4. - $\{({}^tW \times {}^tX, {}^t\mathcal{V} \otimes {}^t\mathcal{X}), {}^tC^s, t, s \in T, t \leq s\}$ est appelé le *processus produit* associé au s.a.g.l.c. $\{({}^tW, {}^t\mathcal{V}), ({}^tX, {}^t\mathcal{X}), {}^t\Pi^s, {}^tP^s, t, s \in T, t \leq s\}$.

1.4. Soit $w \in {}^tW$ arbitraire, mais fixe, et considérons la probabilité de passage ${}^t\tilde{P}_w^s$ de $({}^tX, {}^t\mathcal{X})$ dans $({}^sX, {}^s\mathcal{X})$, définie par

$${}^t\tilde{P}_w^s(x; B) \stackrel{(5)}{=} \int_{{}^sW} {}^t\Pi^s((w, x); dw') {}^sP(w'; B)$$

pour tout $t < s$. Il est clair que ${}^t\tilde{P}_w^s(x; B) = {}^tC^s((w, x); {}^sW \times B)$ et (1.10) devient

$$(1.11) \quad {}^t\tilde{P}_w^s(x; B) = \int_{{}^rW \times {}^rX} {}^tC^r((w, x); d(w', x')) {}^r\tilde{P}_{w'}^s(x'; B)$$

pour tout $t < r < s$.

L'utilisation de ${}^t\tilde{P}_w^s$ permet d'écrire (1.2) sous la forme

$${}^tP^s(w; B) = \int_{{}^tX} {}^tP(w; dx) {}^t\tilde{P}_w^s(x; B)$$

pour tout $t < s$.

DÉFINITION 1.5. - $\{({}^tX, {}^t\mathcal{X}), {}^t\tilde{P}_w^s, t, s \in T, t \leq s\}$ est appelé le *processus observable* ⁽⁶⁾ associé au s.a.g.l.c. $\{({}^tW, {}^t\mathcal{V}), ({}^tX, {}^t\mathcal{X}), {}^t\Pi^s, {}^tP^s, t, s \in T, t \leq s\}$.

(5) Nous aurions pu mettre ${}^t\tilde{P}_\lambda^s(x; B) = \int_{{}^tW \times {}^sW} \lambda(dw) {}^t\Pi^s((w, x); dw') {}^sP(w'; B)$. Pour

simplification seulement, nous avons pris $\lambda(A) = \delta(w; A)$, δ étant la mesure de probabilité ponctuelle.

(6) Voir la note (3).

2. OPÉRATEURS

2.1. Soit $B({}^tW, {}^t\mathfrak{W})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions réelles ψ , bornées et ${}^t\mathfrak{W}$ -mesurables, définies sur tW , muni de la norme de la convergence uniforme $\|\psi\| = \sup_{w \in {}^tW} |\psi(w)|$. Pour tout $t \in T$, $t < s$ et $x \in {}^tX$, nous définissons l'opérateur ${}^t\Gamma_x^s$ de $B({}^sW, {}^s\mathfrak{W})$ en $B({}^tW, {}^t\mathfrak{W})$, par

$$({}^t\Gamma_x^s \psi)(w) = \int_{{}^sW} {}^t\Pi^s((w, x); dw') \psi(w').$$

En particulier $({}^t\Gamma_x^s \chi_A)(\cdot) = {}^t\Pi^s((\cdot, x); A)$. Il est clair aussi que ${}^t\Gamma_x^s$ est un opérateur linéaire de norme 1. Evidemment, si le s.a.g.l.c. considéré est homogène, alors ${}^t\Gamma_x^s$ ne dépendra que de $s - t$, c'est-à-dire ${}^t\Gamma_x^s = \hat{\Gamma}_x^{s-t}$ pour tout $t \in T$, $t < s$ et $x \in {}^tX$.

Pour tout $t \in T$ et $t < s$ nous pouvons définir aussi l'opérateur ${}^tU^s$ de $B({}^sW, {}^s\mathfrak{W})$ en $B({}^tW, {}^t\mathfrak{W})$, par

$$({}^tU^s \psi)(w) = \int_{{}^tX \times {}^tW} {}^tP(w; dx) {}^t\Pi^s((w, x); dw') \psi(w').$$

Evidemment,

$$(2.1) \quad ({}^tU^s \psi)(w) = \int_{{}^tX} {}^tP(w; dx) ({}^t\Gamma_x^s \psi)(w)$$

ou

$$(2.2) \quad ({}^tU^s \psi)(w) = \int_{{}^sW} {}^tQ^s(w; dw') \psi(w').$$

En particulier ${}^tU^s \chi_A = {}^tQ^s(\cdot; A)$. Il est clair aussi que ${}^tU^s$ est un opérateur linéaire de norme 1. Evidemment, si le s.a.g.l.c. considéré est homogène, alors ${}^tU^s$ ne dépendra que de $s - t$, c'est-à-dire ${}^tU^s = \hat{U}^{s-t}$ pour tout $t \in T$ et $t < s$.

Notons que ${}^tU^s$ n'est que le semi-groupe d'opérateurs correspondant au processus non observable ${}^tQ^s$ et par conséquent ${}^tU^s \psi = {}^tU^r({}^rU^s \psi)$ pour tout $t < r < s$, et pour le cas homogène

$$\hat{U}^{r+r'} \psi = \hat{U}^r({}^{r'}U \psi)$$

pour tout $r, r' > 0$. Il est clair que si (1.5) est valable pour $t \leq r \leq s$, alors ${}^tU^s = {}^tU^t {}^tU^s = {}^tU^s {}^tU^s$ pour tout $t \leq s$. Dans ce cas nous pouvons donner un sens à l'opérateur ${}^t\Gamma_x^t$ en convenant qu'il est défini de façon que (2.1) et (2.2) coïncident pour $t = s$.

En utilisant les opérateurs ${}^t\Gamma_x^s$ et ${}^tU^s$, nous pouvons écrire tout de suite

$${}^tP^s(w; B) = \int_{{}^tX} {}^tP(w; dx) ({}^t\Gamma_x^s P(\cdot; B))(w)$$

ou

$${}^tP^s(w; B) = ({}^tU^s {}^sP(\cdot; B))(w)$$

pour tout $t < s$. De même, pour le processus observable nous obtenons

$${}^t\tilde{P}_w^s(x; B) = ({}^t\Gamma_x^s P(\cdot; B)) (w).$$

Si le processus observable est de Markov, alors ${}^t\Gamma_x^s\psi$ est une constante par rapport à $w \in {}^sW$ et

$${}^t\Gamma_x^s\psi = \int_{{}^rX} ({}^t\Gamma_x^r P(\cdot; dx')) ({}^r\Gamma_{x'}^s \psi).$$

3. UN THÉORÈME D'EXISTENCE

Démontrons un théorème d'existence dans le cas où T admet un plus petit élément t_0 .

THÉORÈME 3.1. — Soit $\{{}^tW, {}^t\mathfrak{W}\}, ({}^tX, {}^t\mathfrak{X}), {}^t\Pi^s, {}^tP^s, t, s \in T, t \leq s\}$ un s.a.g.l.c. et soit λ une mesure de probabilité sur ${}^{t_0}W$. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{K}, P_\lambda)$ et trois fonctions aléatoires $(w_t)_{t \in T}, (x_t)_{t \in T}$ et $(z_t)_{t \in T}$, où w_t, x_t et z_t , pour tout $t \in T$, sont définies sur Ω et à valeurs respectivement dans ${}^tW, {}^tX$ et ${}^tW \times {}^tX$, telles que:

$$(i) \quad P_\lambda(w_{t_0} \in A) = \lambda(A) \quad , \quad P_\lambda(x_{t_0} \in B) = \int_{{}^{t_0}W} \lambda(dw) {}^{t_0}P(w; B),$$

$$P_\lambda(z_{t_0} \in D) = \int_D \lambda(dw) {}^{t_0}P(w; dx);$$

$$(ii) \quad P_\lambda(w_s \in A \mid y_t = (w, x)) = {}^t\Pi^s((w, x); A) \quad \text{pour tout } t, s \in T, t \leq s;$$

$$(iii) \quad P_\lambda(x_s \in B \mid w_t = w) = {}^tP^s(w; B) \quad \text{pour tout } t, s \in T, t \leq s;$$

$$(iv) \quad P_\lambda(w_t \in A \mid w_s = w) = {}^tQ^s(w; A) \quad \text{pour tout } t, s \in T, t \leq s;$$

$$(v) \quad P_\lambda(z_t \in D \mid z_s = (w, x)) = {}^tC^s((w, x); D) \quad \text{pour tout } t, s \in T, t \leq s;$$

$$(vi) \quad P_\lambda(x_s \in B \mid y_t = (w, x)) = {}^t\tilde{P}_w^s(x; B) \quad \text{pour tout } t, s \in T, t \leq s;$$

Ici $(w_t)_{t \in T}, (x_t)_{t \in T}$ et $(z_t)_{t \in T}$ sont respectivement, des versions des processus non observable, observable et produit, associés à ce s.a.g.l.c.

Démonstration. — La probabilité de transition ${}^tC^s$ correspondant à un processus de Markov, on sait que, sous des hypothèses raisonnables admises implicitement ici, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{K}, P_\lambda)$ et une fonction aléatoire $(z_t)_{t \in T}$ vérifiant (v) et la troisième partie de la condition (i).

Posons alors $w_t = \text{proj}_{{}^tW} z_t$ et $x_t = \text{proj}_{{}^tX} z_t$. Il est clair que $(w_t)_{t \in T}$ et $(x_t)_{t \in T}$ satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii). Puis (iv) se déduit de (v) en prenant $D = {}^sW \times B$ et (iv) s'obtient en intégrant (ii) par rapport à x .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. I. GIKHMAN et A. V. SKOROKHOD, *Introduction to the theory of random processes*, Philadelphia–London–Toronto, Saunders (1969).
- [2] M. IOSIFESCU, *Systèmes aléatoires à liaisons complètes à paramètre continu*, « Rev. Roumaine Math. Pures Appl. », **12**, 1289–1292 (1967).
- [3] M. IOSIFESCU et R. THEODORESCU, *Random processes and learning*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer (1969).
- [4] G. LE CALVÉ et R. THEODORESCU, *Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes*, « Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete », **19**, 19–28 (1971).
- [5] G. MARINESCU, *Sur les processus stochastiques généralisés*, Trans. 2nd Prague Conf. Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, 349–351, Prague, Academia (1970).
- [6] O. ONICESCU, *Processus aléatoires formant une chaîne continue à liaisons complètes*, « Rev. Univ. C. I. Parhon Politechn. București, Ser. St. Nat. », **4-5**, 73–85 (1954) (en roumain).