
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

IDA CATTANEO GASPARINI

**Algebra di Lie e caratteristica χ di uno spazio
omogeneo compatto**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.3, p. 406–411.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_3_406_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Algebra di Lie e caratteristica χ di uno spazio omogeneo compatto* (*). Nota di IDA CATTANEO GASPARINI, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — A sufficient condition is given in order that the characteristic of a compact homogenous space G/H be null. Such a condition is expressed through the existence of elements of stability in the Lie algebra of G .

A. Weil, H. Hopf e H. Samelson hanno dimostrato che la caratteristica di Eulero Poincaré χ di uno spazio omogeneo compatto G/H è non negativa. La dimostrazione è fatta usando come strumento essenziale la formula dei punti fissi di Lefschetz come in [6], [11] ovvero la nozione di caratteristica di una rappresentazione continua come in [10].

È possibile che il teorema possa anche dimostrarsi basandosi sul teorema generalizzato di Gauss Bonnet, ma, come fa notare esplicitamente Samelson in [10], una tale dimostrazione non si conosce.

Nel presente lavoro si utilizza il teorema generalizzato di Gauss Bonnet per studiare il problema precedente limitatamente al caso $\chi = 0$.

Precisamente si dimostra che se in $\mathfrak{g}$, algebra di Lie di G , esiste un elemento di « stabilità », per $\mathfrak{m}$, sottospazio supplementare di $\mathfrak{h}$, algebra di Lie di H , si ha $\chi = 0$. Nel caso di spazio simmetrico la condizione equivale all'ipotesi che $\mathfrak{m}$ ammetta in $\mathfrak{g}$ un centralizzatore non vuoto.

Questi risultati sono stati ottenuti utilizzando sistematicamente un operatore, di differenziazione totale di Lie secondo un elemento qualunque di $\mathfrak{g}$, introdotto in un precedente lavoro [4].

1. Sia G un gruppo di Lie compatto e connesso, H un suo sottogruppo chiuso. Lo spazio omogeneo $M = G/H$ delle classi laterali sinistre $[gH]$ per ogni $g \in G$ può dotarsi in modo unico di una struttura di varietà analitica [5] tale che G operi analiticamente su di essa, ossia tale che l'applicazione

$$\tau_k: (k, [gH]) \rightarrow [kgH] \quad \forall k \in G$$

sia analitica e inoltre la proiezione $\pi: g \rightarrow [gH]$ sia una applicazione di rango massimo.

Le funzioni C^∞ su G/H possono identificarsi con le funzioni C^∞ di G che sono costanti sulle classi laterali.

Sia $\mathfrak{g} = T_e(G)$ lo spazio tangente a G nell'identità e . Tale spazio ha, come è noto, una struttura di algebra di Lie tramite l'isomorfismo con i campi di

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Ricerca sulle strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1973.

vettori su G invarianti a destra o a sinistra. Indichiamo inoltre con $\mathfrak{h}$ gli elementi di $T_e(G)$ tangenti al sottogruppo H .

Poichè H è chiuso in G e quindi è compatto, il gruppo $\text{ad}(H)$, restrizione ad H della rappresentazione aggiunta di G , è un gruppo compatto che opera linearmente su $\mathfrak{g}$.

Se $\langle, \rangle$ è un qualunque prodotto scalare su $\mathfrak{g}$, di forma quadratica positiva si definisce un nuovo prodotto scalare $(,)$ invariante per $\text{ad}(H)$ mediante la posizione

$$(X, Y) = \int_H \langle \text{ad}(h)(X), \text{ad}(h)(Y) \rangle dh$$

con dh misura di Haar su H , e X, Y elementi arbitrari di $\mathfrak{g}$.

Sia m il sottospazio di $\mathfrak{g}$ supplementare e ortogonale ad $\mathfrak{h}$ secondo questo prodotto scalare: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + m$, $\mathfrak{h} \cap m = 0$; poichè $\text{ad}(H)$ lascia invariato il sottospazio $\mathfrak{h}$ lascia invariato anche il sottospazio m ; si ha cioè:

$$\text{ad}(H)m \subset m.$$

Lo spazio G/H viene così ad avere una struttura di spazio omogeneo riduttivo [8].

Se π_* è il differenziale della applicazione π , $\text{Ker } \pi_* = T_e(H)$, e m può essere identificato con $T_{[H]}(G/H)$ mediante l'applicazione π_* .

Consideriamo ora la restrizione del prodotto scalare $(,)$ al sottospazio m . L'identificazione di m con $T_{[H]}(G/H)$ induce su $T_{[H]}(G/H)$ un prodotto scalare invariante per il gruppo lineare di isotropia $\tilde{H}$ ⁽¹⁾. Mediante le trasformazioni τ_k ($k \in G$) di G operante su G/H si definisce allora sulla varietà G/H una metrica riemanniana invariante per G .

Possiamo ora determinare due intorni U_m e $U_{\mathfrak{h}}$ di 0 , rispettivamente in m e $\mathfrak{h}$, tali che l'applicazione

$$\phi: X, Y \mapsto \exp X \exp Y \quad X \in U_m; Y \in U_{\mathfrak{h}}$$

sia un diffeomorfismo di $U_m \times U_{\mathfrak{h}}$ in un intorno di e in G ; l'intorno U_m sia inoltre tale che la proiezione canonica π applichi diffeomorficamente $\exp U_m$ in un intorno $U_{[H]}$ di $[H]$ in G/H ; π applica anche nello stesso intorno $U_{[H]}$, in modo differenziabile, l'intorno $\exp(U_m) \exp(U_{\mathfrak{h}})$ di e .

Indichiamo con Ψ l'omomorfismo naturale dell'algebra di Lie dei campi di vettori invarianti a sinistra su G nell'algebra di Lie dei campi di vettori su G/H indotti dall'azione τ di G su G/H . Se $X \in \mathfrak{g}$, $(\Psi X)_{[H]}$ è tangente per $t = 0$ alla curva $t \rightarrow \exp(tX)[H]$. ($\equiv \tau_{\exp(tX)}[H]$).

(1) La rappresentazione lineare di H su $T_{[H]}(M)$ che si ottiene facendo corrispondere ad ogni elemento di $h \in H$ l'applicazione lineare di $T_{[H]}(M)$ in sé definita da $\tau_{*h}[H]$ definisce il *gruppo lineare di isotropia* $\tilde{H}$ nel punto $[H]$.

Più in particolare se $X \in m$ risulta $(\Psi H)_{[H]} = \pi_* X$, mentre se $X \in \mathfrak{h}$, essendo $\exp(tX)[H] = [H]$, si ha $(\Psi X)_{[H]} = 0$. Per $X \in \mathfrak{h}$ il campo ΨX ha in $[H]$ una singolarità di I^a specie (zero semplice).

Per semplicità di scrittura indicheremo nel seguito il punto $[H]$ di G/H con p_0 e con p il punto generico di U_{p_0} ; inoltre, si indicherà con $\tilde{X}(p)$ il campo ΨX .

2. Consideriamo ora una base $\{X_s\}$ di m ($s = 1, 2, \dots, m$; $m = \dim m$) e indichiamo con $\{\tilde{X}_s(p)\}$ la base corrispondente di $\mathcal{K}$ modulo delle trasformazioni infinitesimali di U_{p_0} .

Se $W = W^s X_s$ è un vettore di m , $\tilde{W} = W^s \tilde{X}_s$ è allora il campo corrispondente di $\mathcal{K}$.

Sia ancora $\{X_\alpha\}$ una base di $\mathfrak{h}$, ($\alpha = r + 1, \dots, n$; $n = \dim \mathfrak{h}$), $\tilde{X}_\alpha(p)$ i rispettivi campi indotti su U_{p_0} . Se $\tilde{V} = V^\alpha X_\alpha$ è un vettore di $\mathfrak{h}$, $V = V^\alpha X_\alpha$ è il campo corrispondente di U_{p_0} . Ciò premesso richiamiamo la seguente definizione introdotta in [4].

DEFINIZIONE. Si chiama differenziale di Lie, operante su un campo di tensori S di G/H , rispetto ad un *vettore qualunque* $Z \in \mathfrak{g}$ ($Z = Z_m + Z_{\mathfrak{h}}$, $Z_m \in U_m$, $Z_{\mathfrak{h}} \in U_{\mathfrak{h}}$) l'operatore θ_Z così definito in p_0 :

$$(3) \quad (\theta_Z S)_{p_0} \stackrel{\text{def}}{=} Z_m^s L_{X_s} S + Z_h^\alpha L_{X_\alpha} S \equiv Z^A L_{X_A} S$$

$$(s = 1, 2, \dots, m; \quad \alpha = m + 1, \dots, n; \quad A = 1, 2, \dots, n)$$

ove L_{X_s} e L_{X_α} sono le derivate di Lie in p_0 rispetto ai campi $\tilde{X}_s$ e $\tilde{X}_\alpha$. Si noti che la presenza dei vettori X_α è effettivamente operante. Infatti se pure essi generano su U_{p_0} altrettanti campi di vettori aventi uno zero in p_0 , si tratta però di zero semplice; quindi la corrispondente derivata di Lie in p_0 non è identicamente nulla.

La definizione di θ_Z in un punto p di G/H si estende al modo seguente. Sia $p = \tau_g p_0$, con $g = \exp X$, $X \in U_m$. Si definisce allora, con evidente significato di simboli:

$$(4) \quad (\theta_Z S)_p = \tau_g (Z^A L_{\tilde{X}_A} \tau_g^{-1} S)_{p_0} = (Z^A (L_{\tilde{X}_A} S)_p) \equiv (L_{\tilde{Z}} S)_p.$$

L'uguaglianza tra le prime due espressioni di $(\theta_Z S)_p$ è una conseguenza della proprietà della derivata di Lie di commutare con ogni applicazione differenziabile.

Per quanto riguarda l'azione di θ_Z sugli scalari $f \in C^\infty(G/H)$, se $Z \in U_m$ $\theta_{Z_m} f$ coincide con il differenziale ordinario secondo $\tilde{Z}_m$, mentre se $Z \in U_{\mathfrak{h}}$ si ha $\theta_{Z_{\mathfrak{h}}} f = 0$.

Come si è visto nel citato lavoro [4] sussiste il seguente

TEOREMA. In uno spazio omogeneo riduttivo (e in particolare in uno spazio omogeneo compatto) G/H , con $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus m$, l'operatore differenziale θ_Z gode

delle seguenti proprietà:

a) soddisfa a tutti gli assiomi caratteristici di un operatore di connessione comprese le F -linearità rispetto al vettore Z (F , modulo delle funzioni C^∞ su $M = G/H$);

b) è definito globalmente su G/H ;

c) è legato alla decomposizione di g in somma diretta di $\mathfrak{h}$ e di $\mathfrak{m}$ ma non al riferimento $\{X_A\}$.

Mediante l'operatore differenziale introdotto si esplicita molto facilmente l'operatore di curvatura sezionale in p_0 secondo un 2-piano Σ , appartenente allo spazio tangente a G/H in p_0 .

Indicheremo questo operatore di curvatura sezionale con $R(p_0, \Sigma)$ o anche con $R(p_0, \tilde{X}, \tilde{Y})$, se $\tilde{X}, \tilde{Y}$ sono i due campi di vettori indotti da due vettori X, Y di $\mathfrak{m}$, individuanti nel punto p_0 il 2-piano Σ .

Poichè $\mathfrak{m}$ non è una sottoalgebra di Lie, si ha

$$[X, Y] = [X, Y]_m + [X, Y]_{\mathfrak{h}}$$

e quindi

$$\pi_* [X, Y]_m = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{p_0}.$$

Inoltre

$$R(p_0, \tilde{X}, \tilde{Y}) = [\theta_X, \theta_Y] - \theta_{[X, Y]}$$

ma, (cfr. [4])

$$[\theta_X, \theta_Y] = \theta_{[X, Y]_m};$$

se ne deduce

$$(5) \quad R(p_0, \tilde{X}, \tilde{Y}) = -\theta_{[X, Y]_{\mathfrak{h}}} = -L_{[X, Y]_{\mathfrak{h}}}.$$

A causa della invarianza di θ , in ogni punto $p \in G/H$ si ha

$$R(p, \tilde{X}, \tilde{Y}) = -L_{[\tilde{X}\tilde{Y}]_{\mathfrak{h}}}.$$

3. Aggiungiamo ora l'ipotesi che lo spazio omogeneo, compatto $M = G/H$ sia orientabile e di dimensione pari. Assunto un coriferimento $\{\vartheta^i\}$ associato a una base ortonormale di $\mathfrak{m}$, sia $\Omega = (\Omega_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) la 2-forma di curvatura associata alla connessione θ precedentemente definita. Indichiamo con Ω_m la m -forma

$$(6) \quad \Omega_m = \frac{1}{2^m \pi^{m/2} \binom{m}{2}!} \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{m-1} i_m}.$$

Come è noto, essendo Ω_m di ordine massimo in M , essa può esprimersi nella forma

$$(7) \quad \Omega_m = \frac{m!}{2^m \pi^{m/2} \binom{m}{2}!} K \vartheta^1 \wedge \vartheta^2 \wedge \dots \wedge \vartheta^m$$

la funzione scalare K essendo la cosiddetta curvatura di Lipsichtz-Killing

di M . In termini dell'operatore di curvatura sezionale $R(X_i X_j)$ di G/H , K è data dalla formula

$$(8) \quad K(M) = \frac{(-1)^{m/2}}{2^{m/2} m!} \sum \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_m} (R(X_{i_1} X_{i_2}) X_{j_1}, X_{j_2}) \dots \\ \dots (R(X_{i_{m-1}} X_{i_m}) X_{j_{m-1}}, X_{j_m}).$$

In essa compaiono le componenti del tensore di curvatura che, tenuto conto delle forme (5) dell'operatore di curvatura sezionale in p_0 mediante le derivate di Lie secondo i vettori della base di m si esprimono

$$(R(X_k X_l) X_s, X_t) = - (L_{[X_k X_l]_h} X_s, X_t).$$

La m -forma di curvatura Ω_m fornisce la caratteristica di Eulero-Poincaré dello spazio G/H mediante la celebre formula generalizzata di Gauss-Bonnet

$$\int_{G/H} \Omega = \chi(G/H).$$

Tutto ciò premesso facciamo l'ulteriore ipotesi che per un particolare elemento non nullo $X \in m$ e per ogni valore di $l = 1, 2, \dots, m$ sia $[X, X_l]_h = 0$: diremo allora che m è *stabile* rispetto a X . È chiaro che l'ipotesi implica $[X Y]_h = 0$ per ogni elemento Y di m . Nulla vieta poi di assumere X come uno dei vettori della base, diciamo X_1 .

Nell'ammessa ipotesi di stabilità rispetto a X_1 è immediato riconoscere che per valori generici di l, s, t risulta

$$(9) \quad (R(X_1, X_l) X_s, X_t) = - (L_{[X_1, X_l]_h} X_s, X_t) = 0 \quad (l, s, t = 1, 2, \dots, m).$$

Tenuto conto allora che in ogni termine della somma (8) che definisce la curvatura $K(M)$ compare un fattore del tipo (9) si deduce che K è nullo in p_0 . Essendo inoltre K invariante per G , si trae che essa è identicamente nulla in M e conseguentemente è nulla la caratteristica χ dello spazio G/H . Possiamo pertanto enunciare il teorema seguente:

TEOREMA 1. *Sia G/H uno spazio omogeneo, orientabile, di dimensione pari, con G gruppo di Lie connesso e compatto ed H suo sottogruppo chiuso. Siano poi $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ le algebre di Lie di G ed H ed m il sottospazio supplementare ed ortogonale ad $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$. Se il sottospazio m è stabile rispetto a un elemento $X \in m$, la caratteristica di Eulero-Poincaré di G/H è nulla.*

4. Se lo spazio omogeneo $M = G/H$ è simmetrico, mantenendo le notazioni precedenti valgono le seguenti relazioni tra i sottospazi $\mathfrak{h}$ e m :

$$(10) \quad [\mathfrak{h}, m] \subset m$$

$$(11) \quad [m, m] \subset \mathfrak{h}.$$

Vale in tale caso il

TEOREMA 2. *Sia G/H uno spazio simmetrico di dimensioni pari e orientabile, con G gruppo di Lie compatto e connesso e H sottogruppo di G chiuso. Dette $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ le algebre di Lie di G e H ed m il sottospazio supplementare e ortogonale ad $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$, se il centralizzatore di m in $\mathfrak{g}$ è diverso da zero, la caratteristica di Eulero-Poincaré di G/H è nulla.*

La dimostrazione si riconduce al teorema precedente mostrando che l'ipotesi congiunta che G/H sia simmetrico e che il centralizzatore di m in $\mathfrak{g}$ sia non vuoto implica l'esistenza in m di elementi di stabilità. Infatti osserviamo anzitutto che il centralizzatore C di m in $\mathfrak{g}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$; ciò si riconosce dalla identità di Jacobi applicata successivamente a $X, Y \in C$ e $Z \in m$, e a $X \in C$ $Y \in m$ $Z \in \mathfrak{h}$. Inoltre anche $C \cap \mathfrak{h}$ è un ideale di $\mathfrak{g}$ poichè

$$(12) \quad [m, C \cap \mathfrak{h}] \subset [m, C] = 0$$

per definizione di C , e

$$(13) \quad [\mathfrak{h}, C \cap \mathfrak{h}] \subset C \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset C \cap \mathfrak{h}.$$

Da (12) e (13) consegue

$$[\mathfrak{g}, C \cap \mathfrak{h}] \subset C \cap \mathfrak{h};$$

poichè d'altra parte non vi sono ideali di $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$ essendo $[m, \mathfrak{h}] \subset m$ per la (10) si conclude che $C \cap \mathfrak{h} = 0$ ossia $C \subset m$. Resta così provata l'esistenza in m di elementi di stabilità e quindi l'applicabilità del Teorema 1.

L'esistenza del centralizzatore di m in $\mathfrak{g}$ fornisce quindi una condizione sufficiente per l'annullarsi dell'invariante topologico χ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMBROSE W. and SINGER I. M., *On homogenous Riemannian manifolds*, «Duke Math. J.», 25 (1958).
- [2] CARTAN E., *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann*, «Bull. Soc. Math. France», 54 (1926).
- [3] CATTANEO GASPARINI I., *Operatori intrinseci di derivazione su una varietà parallelizzabile*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 46 (6), 682-685 (1969).
- [4] CATTANEO GASPARINI I., *Introduction d'une différentiation totale de Lie sur un espace homogène réductif*, «C. R. Acad. Sc. Paris», 272, 1192-1194 (1971).
- [5] HELGASON S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York 1962.
- [6] HOPF H. and SAMELSON H., *Ein Satz über die Wirkungräume geschlossener Liescher Gruppen*, «Comment. Math. Helv.», 13, 240-251 (1940-1941).
- [7] KOBAYASHI S. and NOMIZU K., *Foundations of differential geometry*, Vol. I e II, Interscience Publishers 1969.
- [8] LICHNEROWICZ A., *Géométrie des Groupes de Transformations*, Dunod, Paris 1958.
- [9] NOMIZU K., *Invariant affine connections on homogenous spaces*, «Amer. J. Math.», 76 (1954).
- [10] SAMELSON H., *On curvature and characteristic of homogenous space*, «Michigan Math. J.», 5, 18 (1958).
- [11] WEIL A., *Démonstration Topologique d'un Théorème fondamental de Cartan*, «Cr. Acad. Sc. Paris», 200, 518-520 (1935).