Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Bompiani

Alcune proprietà delle varietà differenziabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.3, p. 402–405.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_3_402_0>

Geometria differenziale. — *Alcune proprietà delle varietà differenziabili.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — Generalizations of properties of differentiable manifolds first given by B. Segre.

1. – INTRODUZIONE

In un lavoro ancora recente di B. Segre dedicato allo studio di certi tipi di varietà algebriche [1], Egli ha preso le mosse da alcune proprietà elementari delle varietà differenziabili (in un iperspazio proiettivo).

Queste proprietà hanno attratto la mia attenzione per la loro semplicità: e da una parte ne ho cercato dimostrazioni puramente sintetiche e dall'altra parte ne ho cercato estensioni, che pure si presentano spontanee e che pure potranno venire utili in questioni algebriche.

2. – NUOVA DIMOSTRAZIONE ED ESTENSIONE DI UN TEOREMA DI B. SEGRE SUGLI SPAZI TANGENTI A CERTE VARIETÀ DIFFERENZIABILI

L'enunciato del teorema in esame è il seguente: *se al variare di un punto* P *sulla varietà differenziabile* V_d *lo spazio tangente* T_d^P *sta in uno spazio* S_{d+1} (*a priori variabile*) *passante per un* S_d^0 *fisso anche la* V_d *giace in un siffatto* S_{d+1} (*ossia il suddetto* S_{d+1} *rimane necessariamente fisso*).

L'ipotesi fatta sugli spazi tangenti a V_d equivale a dire che, per qualsiasi $P \in V_d$, l'intersezione di T_d^P con S_d^0 è uno spazio S_{d-1}^P (dipendente da P): $T_d^P \cap S_d^0 = S_{d-1}^P$. Si consideri un punto $P + dP \in V_d$: per esso si avrà un $S_{d-1}^{P+dP} = T_d^{P+dP} \cap S_d^0$.

Siccome il punto P appartiene anche a T_d^{P+dP} lo spazio congiungente S_d^0 con $P + dP$ contiene sia T_d^P che T_d^{P+dP}. Se s'integra questo processo su qualsiasi curva di V_d uscente da P risulta che tutti gli spazi tangenti appartengono ad uno stesso S_{d+1}, quindi $V \subset S_{d+1}$ (fisso).

Enunciamo il teorema anzi detto nella forma: *se gli spazi tangenti ad una* V_d *segano tutti un* S_d^0 *fisso in spazi* S_{d-1}, *tutta la* V_d *appartiene ad uno* S_{d-1} (*fisso*).

(*) Presentata nella seduta del 10 marzo 1973.

(1) B. SEGRE, *Su certe varietà algebriche intersezioni di quadriche o a sezioni curvilinee normali*, «Annali di Matem. (IV)», *84*, 125–156 (1970). La presente Nota è dedicata a B. Segre in occasione del suo 70-esimo compleanno (16 febbraio 1903).

Un'estensione immediata riguarda le V_d i cui spazi tangenti incontrano uno spazio fisso $S^0_{d+d'}$ in S_{d-1} (variabili col punto di contatto).

Ragionando come sopra (e usando le stesse notazioni) lo spazio congiungente $S^0_{d+d'}$ con P contiene anche qualsiasi $P + dP$ di V_d e quindi lo $S_{d+d'+1}$ congiungente $S^0_{d+d'}$ con T^P_d contiene anche T^{P+dP}_d: e con lo stesso procedimento d'integrazione prima adoperato risulta che: *se tutti gli spazi tangenti ad una* V_d *incontrano uno* $S^0_{d+d'}$ *secondo spazi* S_{d-1}, *tutta la* V_d *è contenuta in uno* $S_{d+d'+1}$.

Come si vede sia la dimostrazione del teorema che della sua estensione dipende dal fatto che due spazi tangenti in punti infinitamente vicini hanno sempre (almeno) un punto in comune.

3. – Estensione del teorema di B. Segre agli spazi osculatori

L'osservazione che chiude il n. precedente suggerisce la ricerca di una estensione del teorema precedente sostituendo alla considerazione degli spazi tangenti quella degli spazi osculatori di ordine $\nu\,(> 1)$, cioè gli $S(\nu)$, a V_d: la dimensione di uno generico di questi spazi s'indicherà con $d(\nu)$: analogamente quella di un $S(\nu - 1)$ s'indicherà con $d(\nu - 1)$ (2).

Si consideri lo spazio $S(\nu - 1)$ in un punto P di V_d che indicheremo con $S^P(\nu - 1)$. Se passiamo ad un punto $P + dP$ pure di V_d per costruire $S^{P+dP}(\nu - 1)$ bisognerà eseguire una differenziazione delle coordinate dei punti che individuano $S^P(\nu - 1)$, quindi $S^{P+dP}(\nu - 1)$ è contenuto in $S^P(\nu)$; o, scambiando i ruoli di P e $P + dP$, lo $S^{P+dP}(\nu)$ contiene $S^P(\nu - 1)$. Supponiamo ora dato uno spazio $S^0_\delta\,(\delta \geq d(\nu)$ e che $S^P(\nu)$ sia individuato da $S^P(\nu - 1)$ e da uno spazio contenuto in S^0_δ: lo spazio $S^0_\delta \cap S^P(\nu)$ dovrà avere dimensione $d(\nu) - d(\nu - 1) - 1$ e dipenderà da P: indichiamolo con $S^P_{d(\nu)-d(\nu-1)-1}$. Se ciò accade, cioè se ogni spazio $S^P(\nu)$ relativo a punti P di V_d sega S^0_δ fisso in un $S^P_{d(\nu)-d(\nu-1)-1}$ lo spazio congiungente S^0_δ con $S^P(\nu)$ è pure lo spazio $S^0_\delta \cup S^P(\nu - 1) \equiv S_{\delta+d(\nu-1)+1}$.

Se si passa da P a $P + dP$ si ha un altro spazio $S^{P+dP}_{d(\nu)-d(\nu-1)-1}$ ma poichè $S^P(\nu - 1)$ appartiene anche ad $S^{P+dP}(\nu)$ lo spazio $S^0_\delta \cup S^{P+dP}(\nu)$ è lo stesso $S\delta + d(\nu - 1) + 1$.

Poichè lo stesso ragionamento può ripetersi per tutti i punti di tutte le curve passanti per il punto P da cui si è partiti appartenenti a V_d si ha il teorema: *se una varietà differenziale* V_d *di classe di differenziabilità almeno* $\mathcal{C}^\nu$ *è tale che tutti i suoi spazi* $S(\nu)$ *osculatori, di dimensione* $d(\nu)$, *incontrino uno spazio fisso* S^0_δ *in spazii di dimensione* $d(\nu) - d(\nu - 1) - 1$ *(ove* $d(\nu - 1)$ *è la dimensione degli spazi* $(\nu - 1)$ *osculatori) tutta la* V_d *appartiene ad uno spazio di dimensione* $\delta + d(\nu - 1) + 1$.

(2) La dimensione $d(\nu)$ degli $S(\nu)$ dipende dalle eventuali equazioni a derivate parziali lineari e omogenee (fra loro indipendenti) soddisfatte da V_d, di ordine $\leq \nu$. Analogamente per $d(\nu - 1)$.

4. – CONTROLLI ANALITICI

Si può chiedere una dimostrazione analitica del fatto che lo $S^{P+dP}(\nu) \supset \supset S^{P}(\nu - 1)$. Per non complicare eccessivamente la scrittura la darò per il caso $d = 2$, $\nu = 2$: ma si vede senza difficoltà come si estenda a valori qualsiansi di d e di ν.

Prendiamo coordinate non omogenee tutte nulle in P e assumiamo due di esse, x e y come variabili indipendenti su V_2. Mediante combinazioni lineari si possono dividere le coordinate rimanenti in gruppi caratterizzati dal tipo di sviluppi locali nell'intorno di P. Precisamente in un primo gruppo di coordinate z^p, con $p \leq 3$, quelle che cominciano con termini di 2° grado in x, y; in un secondo gruppo le coordinate w^q, con $q \leq 4$, quelle i cui termini iniziali sono di grado 3 in x, y. Delle altre non c'interessiamo perché non intervengono nel nostro problema per $\nu = 2$.

Si avranno quindi sviluppi del tipo

$$(1) \qquad \begin{aligned} z^p &= \varphi_2^p(x, y) + \varphi_3^p(x, y) + [> 3] \\ w^q &= \psi_3^q(x, y) + [> 3], \cdots \end{aligned}$$

ove $[> 3]$ indica termini arbitrari d'ordine > 3 in x, y, le φ e le ψ sono *forme* di grado dato dall'indice, per esempio:

$$\varphi_2^p \equiv a_{11}^p x^2 + 2 a_{12}^p xy + a_{22}^p y^2 \quad , \quad \varphi_3^p \equiv a_{111}^p x^3 + 3 a_{112}^p x^2 y + 3 a_{122}^p xy^2 + a_{222}^p y^3$$

e analogamente per ψ sostituendo ai coefficienti a_{ikl} altri coefficienti b_{ikl}: infine i puntini nella (1) indicano sviluppi omessi di coordinate che iniziano con termini di grado > 3.

È ovvio che $z^p = w^q = 0$ (insieme all'annullarsi delle coordinate omesse) rappresentano il piano tangente in P.

E così $z^p = 0$ (e l'annullarsi delle coordinate omesse) sono le equazioni dello S (2) relativo a P.

Procuriamoci le equazioni dello spazio 2–osculatore in $P + dP$ definito da $x = \varepsilon$ infinitesimo e $y = 0$. Esse risultano dall'annullare i determinanti d'ordine massimo della matrice che ha come elementi della prima linea $x - \varepsilon, y$, le z^p, w^q e le altre coordinate omesse: e nelle ulteriori righe le derivate prime e seconde delle coordinate stesse calcolate per $x = \varepsilon$, $y = 0$.

Se $p = 3$, cioè se $S(2) \equiv S_5$ si ha un determinante del 6° ordine aggiungendo alle 5 colonne con x, y, z^1, z^2, z^3 una colonna con una w^q; gli elementi di questa colonna nelle altre righe sono divisibili per ε. Dividendo tutti gli elementi di questa colonna per ε e moltiplicando per ε gli elementi della prima linea e trascurando i termini in ε^2 l'equazione determinante così ottenuta si scrive

$$\begin{vmatrix} \varepsilon z^1 & \varepsilon z^2 & \varepsilon z^3 & w^q \\ a_{11}^1 & a_{11}^2 & a_{11}^3 & 3\, b_{111}^q \\ a_{12}^1 & a_{12}^2 & a_{12}^3 & 3\, b_{112}^q \\ a_{22}^1 & a_{22}^2 & a_{22}^3 & 3\, b_{122}^q \end{vmatrix} = 0 .$$

Queste equazioni, insieme a quelle ottenute uguagliando a zero le coordinate omesse, rappresentano lo $S^{P+dP}(2)$: e poiché esse sono combinazioni lineari di quelle del piano tangente in P $(z^p = w^q = \cdots = 0)$ questo è $\subset S^{P+dP}(2)$, c.v.d.

Se invece $p = 2$ cioè se gli S (2) di V_2 sono S_4, la V_2 soddisfa a un'equazione lineare omogenea a derivate parziali del 2° ordine, da cui per derivazione si hanno due equazioni del 3° ordine, cioè le derivate terze indipendenti dalle altre e da quelle d'ordine inferiore sono due sole (o una se la superficie soddisfa ad un'altra equazione che non sia conseguenza di quella del 2° ordine).

In questo caso la matrice di partenza ha 5 righe e 6 colonne $(p = 2 , q = 2)$ dalla quale (analogamente al caso precedente) si passa a due determinanti $= 0$ a tre righe con in prima riga z^1, z^2, w^q $(q = 1 , 2)$. E si arriva alla stessa conclusione $S^{P+dP}(2) \supset S^P(1)$.