Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Sbordone

Su una caratterizzazione degli operatori differenziali del 2^o ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.3, p. 365–372.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_3_365_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Analisi matematica. — *Su una caratterizzazione degli operatori differenziali del 2° ordine.* Nota di CARLO SBORDONE, presentata (*) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — A proof is given of an abstract characterization of operators of the form.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

with $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, $b_i \in L^r(\Omega)$ $(r > 2)$, $c \in L^q(\Omega)$ $(q > 1)$, Ω open set of R^n, by particular continuous forms on $H_0^1 \times (H_0^1 \cap L^p)$.

In una Nota di qualche anno fa [4], S. Spagnolo stabiliva una caratterizzazione astratta (tipo quella di Peetre [1]) degli operatori differenziali del 2° ordine autoaggiunti della forma

$$\text{(j)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

a coefficienti misurabili e limitati.

In questa Nota si stabilisce una caratterizzazione astratta di operatori della forma

$$\text{(jj)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

a coefficienti $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, $b_i \in L^r(\Omega)$ $(r > 2)$, $c \in L^q(\Omega)$ $(q > 1)$, Ω aperto di R^n, che generalizza la precedente.

Cominciando ad occuparci del caso $c = 0$, dimostriamo dapprima, con procedimenti che sono nello stesso ordine di idee di quelli di Spagnolo, il seguente:

TEOREMA I. – *Sia* $\alpha : H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \to R$, Ω *aperto di* R^n $(n \geq 1)$, *una forma bilineare tale che*:

$$\text{(i)} \qquad \left.\begin{matrix} u, v \in \mathfrak{D}(\Omega) \\ u \textit{ costante in un intorno di } \operatorname{supp}(v) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha(u, v) = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad |\alpha(u,v) - \alpha(v,u) + \alpha(uv, \widetilde{uv})| \leq M_1 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{L^p} \ ^{(1)} \qquad u, v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

$$\text{(iii)} \qquad |\alpha(u,v)| \leq M \|u\|_{H_0^1} (\|v\|_{H_0^1} + \|v\|_{L^p})$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1973.

(1) Per $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, con $\tilde{\varphi}$ si denota una funzione di classe $\mathfrak{D}$ uguale ad 1 in un intorno del supporto di φ.

ove $2 \leq p < \infty$. *Allora esistono* $a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty}(\Omega)$ *e* $b_i \in L^r(\Omega)$ $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ *tali che*:

$$\alpha(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx$$

per ogni $(u, v) \in H_0^1 \times (H_0^1 \cap L^p)$.

Tale Teorema, nella ulteriore ipotesi della simmetria di α e nel caso particolare $p = 2$, riproduce il Teorema di Spagnolo.

Quindi dimostriamo il seguente:

TEOREMA II. – *Sia* $\alpha : H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \to R$, Ω *aperto di* R^n $(n > 2)$, *una forma bilineare tale che valgano le* (ii), (iii) *del Teorema I con* $2 \leq p < \infty$ *e*:

$$\text{(i')} \quad \left(\begin{array}{l} u, v \in \mathfrak{D}(\Omega) \\ \operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v) = \varnothing \end{array}\right) \Rightarrow \alpha(u, v) = 0$$

$$\text{(iv)} \quad |\alpha(\tilde{u}, u)| \leq M_2 \|u\|_{L^{q_1}}$$

con $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$. *Allora esistono* $a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty}(\Omega)$; $b_i \in L^r(\Omega)$ $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$, $c \in L^q(\Omega)$ $\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q} = 1\right)$ *tali che*:

$$\alpha(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx$$

per ogni $(u, v) \in H_0^1 \times (H_0^1 \cap L^p)$.

Si osservi che un operatore del tipo (jj) con coefficienti $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, $b_i \in L^r(\Omega)$ $(2 < r \leq \infty)$, $c \in L^q(\Omega)$ $(1 < q \leq n)$, Ω aperto di R^n, $n > 2$, determina una forma bilineare che soddisfa alle condizioni del Teorema II per $p = \frac{2r}{r-2}$, $q_1 = \frac{q}{q-1}$, e pertanto si è conseguita una caratterizzazione di tali forme.

Per quanto concerne il caso $n \leq 2$, osservato che per i teoremi di Gagliardo–Nirenberg ([5]), $H_0^1 \cap L^p = H_0^1$ e $\|v\|_{H_0^1} + \|v\|_{L^p}$ è una norma equivalente a $\|v\|_{H_0^1}$, si dimostra infine il seguente:

TEOREMA III. – *Sia* $\alpha : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to R$, *con* Ω *aperto di* R^n $(n \leq 2)$, *una forma bilineare tale che sussistano le* (i'), (ii), (iii), (iv) *del Teorema II, ove* $1 \leq q_1 < \infty$, $2 \leq p < \infty$.

Allora esistono $a_{ij} = a_{ji} \in L^{\infty}(\Omega)$, $b_i \in L^r(\Omega)$ $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$, $c \in L^q(\Omega)$ $\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q} = 1\right)$ *tali che*:

$$(*) \qquad \alpha(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx$$

per ogni $(u, v) \in H_0^1 \times H_0^1$.

Si osservi anche in tal caso che una forma del tipo (*) con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i \in L^r(\Omega)$ $(2 < r \leq \infty)$, $c \in L^q(\Omega)$ $(1 < q \leq \infty)$, verifica le ipotesi del Teorema III per $p = \frac{2r}{r-2}$, $q_1 = \frac{q}{q-1}$, e che pertanto nel caso $n \leq 2$ si è ottenuta una caratterizzazione di operatori del tipo (jj) in cui al coefficiente $c(x)$ del termine di grado zero è consentita la sommabilità di ogni sua potenza q maggiore di 1.

Notazioni. – Sia Ω un aperto dello spazio euclideo R^n. Se $r = (r_1, \cdots, r_n)$ è una n-pla di interi ≥ 0, si pone:

$$|r| = r_1 + \cdots + r_n$$

$$D^r = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r_n}.$$

Si denota al solito con $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali su Ω con derivate di ogni ordine continue e a supporto compatto contenuto in Ω.

$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'(\Omega)$ è lo spazio delle distribuzioni reali su Ω.

Per $p \geq 1$:

$L^p = L^p(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni reali misurabili su Ω aventi potenza p-sima sommabile.

$L^\infty = L^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni reali misurabili su Ω essenzialmente limitate.

$H_0^1 = H_0^1(\Omega)$ è la chiusura di $\mathfrak{D}(\Omega)$ rispetto alla topologia definita dalla norma

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

Tutti questi spazi si intenderanno dotati delle loro usuali strutture algebrico-topologiche.

Allo scopo di pervenire alla dimostrazione del Teorema I, si premettono i seguenti Lemmi.

LEMMA 1. – *Sia* $\alpha(u, v) = \sum_{|r| \leq 2} \langle T_r, (D^r u) \cdot v \rangle$ *definita per* $u, v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ *con* Ω *aperto di* R^n *e* $T_r \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, *soddisfacente la condizione*:

$$(u \text{ costante in un intorno di } \operatorname{supp}(v)) \Rightarrow \alpha(u, v) = 0.$$

Allora esistono A_i, $B_{ij} = B_{ji} \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ *tali che*:

$$\alpha(u, v) = \sum_{i=1}^n \left\langle A_i, \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right\rangle + \sum_{i,j=1}^n \left\langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle$$

per ogni $u, v \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

Dimostrazione. – Dimostriamo in primo luogo che $T_r = 0$ per $|r| = 0$. Infatti sia $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ arbitraria e $\tilde{u} \in \mathfrak{D}(\Omega)$ tale che $\tilde{u} = 1$ in un intorno del supporto di u; allora:

$$0 = \alpha(\tilde{u}, u) = \langle T_0, u \rangle$$

in quanto $\tilde{u} u = u$ e $(D^r \tilde{u}) \cdot u = 0$ se $0 < |r| \leq 2$.

Da cui in definitiva la α può scriversi

$$\alpha(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{T}_i\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right\rangle+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \mathrm{T}_{ij}+\mathrm{T}_{ji}\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \mathrm{T}_{ij}-\mathrm{T}_{ji}\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\rangle.$$

Ma evidentemente:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \mathrm{T}_{ij}-\mathrm{T}_{ji}\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\rangle=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \mathrm{T}_{ij}\,,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}v\right\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \mathrm{T}_{ji}\,,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}v\right\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\langle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathrm{T}_{ji}}{\partial x_j}-\frac{\partial \mathrm{T}_{ij}}{\partial x_j}\right),\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right\rangle.$$

Per cui, posto $\mathrm{B}_{ij}=\frac{1}{2}(\mathrm{T}_{ij}+\mathrm{T}_{ji})=\mathrm{B}_{ji}$, la α viene a scriversi:

$$\alpha(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{A}_i\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right\rangle+\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \mathrm{B}_{ij}\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\rangle,$$

con la ovvia espressione per gli A_i.

LEMMA 2. – *Sia* $\alpha:\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)\to\mathrm{R}$ *una applicazione bilineare tale che per ogni* $u\,,v\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$\alpha(u,v)=\langle \mathrm{T},uv\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{A}_i\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{C}_i\,,u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle+\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \mathrm{B}_{ij}\,,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\rangle$$

e tale che, essendo $p\geq 1$,

$$|\alpha(u,v)|\leq \mathrm{M}\,\|u\|_{\mathrm{H}_0^1}(\|v\|_{\mathrm{H}_0^1}+\|v\|_{\mathrm{L}^p})\qquad u\,,v\in\mathcal{D}(\Omega), \tag{1}$$

ove: $\mathrm{T}\,,\mathrm{A}_i\,,\mathrm{C}_i\,\mathrm{B}_{ij}=\mathrm{B}_{ji}\in\mathcal{D}'(\Omega)$. *Allora si ha* $\mathrm{B}_{ij}\in\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. – Fissata $w\in\mathcal{D}(\Omega)$ $(w\neq 0)$ e fissati $k\,,s\in\{1,\cdots,n\}$, consideriamo le seguenti funzioni:

$$w_1(x)=\frac{1}{\rho}w(x)\operatorname{sen}(\rho x_k)\operatorname{sen}(\rho x_s)$$
$$w_2(x)=-\frac{1}{\rho}w(x)\cos(\rho x_k)\cos(\rho x_s)$$
$$w_3(x)=\frac{1}{\rho}w(x)\operatorname{sen}(\rho x_k)\cos(\rho x_s)$$
$$w_4(x)=\frac{1}{\rho}w(x)\cos(\rho x_k)\operatorname{sen}(\rho x_s)$$

dove $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$ e $\rho=\dfrac{\|w\|_{\mathrm{H}_0^1}+\|w\|_{\mathrm{L}^p}}{\|w\|_{\mathrm{L}^2}}$.

Si vede facilmente che:

$$\|w_j\|^2_{H^1_0} \leq 4\,\|w\|^2_{L^2} + \frac{2}{\rho^2}\,\|w\|^2_{H^1_0} \leq 6\,\|w\|^2_{L^2}$$

$$\|w_j\|_{L^p} \leq \frac{1}{\rho}\,\|w\|_{L^p} \leq \|w\|_{L^2}$$

$$\alpha(w_1, w_2) + \alpha(w_2, w_1) + \alpha(w_3, w_4) + \alpha(w_4, w_3) = 2\,\langle B_{ks}, w^2\rangle ,$$

da cui, per la (1):

$$|\langle B_{ks}, w^2\rangle| \leq 2(6+\sqrt{6})\,M\,\|w\|^2_{L^2} = 2(6+\sqrt{6})\,M\,\|w^2\|_{L^1}.$$

Si ha in definitiva:

$$|\langle B_{ks}, \varphi\rangle| \leq C\,\|\varphi\|_{L^1} \qquad \text{per ogni} \quad \varphi = w^2 \qquad \text{con} \quad w \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ciò che facilmente implica (cfr. [4], p. 62) che la distribuzione B_{ks} si prolunga con continuità sullo spazio $L^1(\Omega)$, ossia $B_{ks} \in L^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione (del Teorema I). – La restrizione di α a $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ è una forma bilineare separatamente continua e pertanto rappresentabile, grazie al teorema dei nuclei di Schwartz [2], come

$$\alpha(u, v) = \langle T, u \otimes v\rangle$$

ove $T \in \mathcal{D}'(\Omega^2)$ e $(u \otimes v)(x, y) = u(x)\,v(y)$.

Osservato che T per la ipotesi (i) ha supporto contenuto nella diagonale di Ω^2, si perviene, come in [4] a

$$\alpha(u, v) = \sum_r \langle T_r, (D^r u)\cdot v\rangle \qquad\qquad u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ove la famiglia di distribuzioni su $\Omega\,\{T_r\}$ è localmente finita.

Si vede facilmente, utilizzando le funzioni $u_\eta, v_\eta, \tilde{u}_\eta, \tilde{v}_\eta$, introdotte da Spagnolo nel corso della dimostrazione del Teorema in [4], che l'ipotesi (iii) implica

$$T_r = 0 \qquad \text{per} \quad |r| > 2.$$

Basta osservare che:

$$\|u_\eta\|_{H^1_0} \;,\; \|\tilde{u}_\eta\|_{H^1_0} \leq C\,|\eta|$$

$$\|v_\eta\|_{H^1_0} + \|v_\eta\|_{L^p} \;,\; \|\tilde{v}_\eta\|_{H^1_0} + \|\tilde{v}_\eta\|_{L^p} \leq C\,|\eta|$$

dove C è una costante che dipende solo dalle funzioni w e ψ fissate.

Allora la α soddisfa le ipotesi del Lemma 1 e pertanto esistono delle distribuzioni A_i, $B_{ij} = B_{ji}$ su Ω, tali che

$$\alpha(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle A_i, \frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\right\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\rangle$$

per ogni $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Applicando il Lemma 2 e sfruttando la (iii) si ricava in più che le B_{ij} sono funzioni di classe $L^\infty(\Omega)$.

Tenuto conto a questo punto che l'ipotesi (ii) si traduce con la relazione

$$2\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i\,,\,\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right\rangle \leq M_1\,\|u\|_{H_0^1}\,\|v\|_{L^p}\,,$$

il Teorema I sarà completamente dimostrato se si mostrerà che tale maggiorazione comporta l'appartenenza delle distribuzioni A_i a $L^r(\Omega)$, perchè in tal caso l'espressione

$$(u\,,v)\to\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}B_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}A_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,dx$$

definisce una forma bilineare e continua su $H_0^1\times(H_0^1\cap L^p)$ che coincide con la nostra forma α su $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ e quindi su tutto $H_0^1\times(H_0^1\cap L^p)$.

Resta quindi da provare il seguente

LEMMA 3. – *Sia* $\beta:\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)\to R$ *una forma bilineare tale che per ogni* $u\,,v\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$\beta(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A_i\,,\,\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right\rangle+\langle T\,,uv\rangle \qquad (T, A_i\in\mathcal{D}'(\Omega))$$

(2)

$$|\beta(u,v)|\leq M\,\|u\|_{H_0^1}\,\|v\|_{L^p} \qquad (p\geq 2)\,.$$

Allora $A_i\in L^r(\Omega)$, *ove* $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{2}=1$.

Dimostrazione. – Fissato $i\in\{1\,,\cdots,n\}$ e $u\,,v\in\mathcal{D}(\Omega)$, consideriamo le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
w_1(x)&=\frac{1}{\rho}\,u(x)\,\operatorname{sen}^2(\rho x_i)\\
w_2(x)&=-v(x)\,\cos^2(\rho x_i)+2v(x)\,\operatorname{sen}(\rho x_i)\,\cos(\rho x_i)\\
w_3(x)&=\frac{1}{\rho}\,u(x)\,\operatorname{sen}(\rho x_i)\,\cos(\rho x_i)\\
w_4(x)&=v(x)\,\operatorname{sen}(\rho x_i)\,\cos(\rho x_i)+v(x)\,(\cos^2(\rho x_i)-\operatorname{sen}^2(\rho x_i))\\
w_5(x)&=-\frac{1}{\rho}\,u(x)\,\cos^2(\rho x_i)\\
w_6(x)&=v(x)\,\operatorname{sen}^2(\rho x_i)+2v(x)\,\operatorname{sen}(\rho x_i)\,\cos(\rho x_i)
\end{aligned}$$

ove $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$ e $\rho=\dfrac{\|u\|_{H_0^1}}{\|u\|_{L^2}}$.

Si riconosce facilmente che:

$$\beta(w_1\,,w_2)+2\,\beta(w_3\,,w_4)+\beta(w_5\,,w_6)=2\,\langle A_i\,,uv\rangle$$

$$\|w_1\|_{H_0^1}\,,\ \|w_3\|_{H_0^1}\,,\ \|w_5\|_{H_0^1}\leq\sqrt{6}\,\|u\|_{L^2}$$

$$\|w_2\|_{L^p}\,,\ \|w_4\|_{L^p}\,,\ \|w_6\|_{L^p}\leq c\,\|v\|_{L^p}$$

ove la costante c non dipende da v; da cui segue per la (2)

$$(3)\qquad |\langle A_i\,,uv\rangle|\leq M_1\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^p}$$

con $M_1=2\sqrt{6}\,cM$.

Ora si osservi che per ogni compatto K di Ω, la (3) comporta in particolare:

$$|\langle A_i , w^2\rangle| \le M_2 \|w\|_{L^p(K)} \|w\|_{L^p(K)} = M_2 \|w^2\|_{L^{p/2}(K)} \quad \text{per ogni} \quad w \in \mathfrak{D}(K),$$

da cui segue $A_i \in (L^{p/2}(K))'$, ovvero, ciò che importa, che A_i è localmente sommabile su Ω.

Per cui la (3) diviene:

$$\left| \int_K A_i\, uv\, dx \right| \le M_1 \|u\|_{L^2(K)} \|v\|_{L^p(K)} .$$

Ossia:

$$A_i \in L^r(K) \qquad \text{con } r \text{ tale che } \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{2} = 1$$

per ogni compatto K di Ω.

La maggiorazione (3) essendo poi uniforme rispetto a K, si ha in definitiva

$$A_i \in L^r(\Omega) .$$

E il Teorema I è così dimostrato.

Dimostrazione (del Teorema II). – Ricalcando i ragionamenti fatti al principio della dimostrazione del Teorema I, otteniamo che la restrizione a $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ della nostra forma α ha l'espressione

$$\alpha(u, v) = \sum_{|r|\le 2} \langle T_r , (D^r u) \cdot v\rangle .$$

Ma allora, procedendo come nella dimostrazione del Lemma 1, si possono determinare delle distribuzioni $T, A_i, B_{ij} = B_{ji}$ su Ω tali che:

$$\alpha(u, v) = \langle T, uv\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle A_i , \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle B_{ij} , \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle$$

per ogni $u, v \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Ne segue, applicando il Lemma 2 e sfruttando la (iii), che le B_{ij} sono funzioni di classe $L^\infty(\Omega)$.

Tenuto conto a questo punto che l'ipotesi (ii) si traduce in

$$\left| \langle T, uv\rangle + 2 \sum_{i=1}^{n} \left\langle A_i , \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right\rangle \right| \le M_1 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{L^p}$$

se ne trae, applicando il Lemma 3, che le A_i sono funzioni di classe L^r su Ω.

Osservato infine che l'ipotesi (iv) si traduce con la relazione

$$|\langle T, u\rangle| \le M_2 \|u\|_{L^{q_1}}$$

si ottiene che $T \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = 1$.

Ora, poichè l'espressione

$$(u\,,v) \to \int_\Omega \mathrm{T}uv\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \mathrm{A}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\,\mathrm{d}x + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \mathrm{B}_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x$$

definita e continua su $\mathrm{H}_0^1 \times (\mathrm{H}_0^1 \cap \mathrm{L}^p)$ coincide con la nostra α su $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ e perciò su tutto $\mathrm{H}_0^1 \times (\mathrm{H}_0^1 \cap \mathrm{L}^p)$, il Teorema II è completamente dimostrato.

Dimostrazione (del Teorema III). – Procedendo come nella dimostrazione del Teorema II si arriva a far vedere che esistono $\mathrm{B}_{ij} = \mathrm{B}_{ji} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $\mathrm{A}_i \in \mathrm{L}^r(\Omega)$ $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$, $\mathrm{T} \in \mathrm{L}^q(\Omega)$ $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q_1}\right)$ tali che per ogni $u\,,v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\alpha(u\,,v) = \int_\Omega \mathrm{T}uv\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \mathrm{A}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\,\mathrm{d}x + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \mathrm{B}_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Ma il secondo membro della (4) definisce una forma bilineare continua su $\mathrm{H}_0^1 \times \mathrm{H}_0^1$ in quanto, grazie ai teoremi di inclusione di Gagliardo–Nirenberg, nell'ipotesi $\mathrm{T} \in \mathrm{L}^q(\Omega)$ $(1 < q \leq \infty)$ esiste $\mathrm{K} > 0$ tale che

$$\left| \int_\Omega \mathrm{T}uv\,\mathrm{d}x \right| \leq \mathrm{K}\, \|u\|_{\mathrm{H}_0^1} \|v\|_{\mathrm{H}_0^1} \qquad u\,,v \in \mathrm{H}_0^1$$

e nella ipotesi $\mathrm{A}_i \in \mathrm{L}^r$ $(2 < r \leq \infty)$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \mathrm{A}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\,\mathrm{d}x \right| \leq \mathrm{K}'\, \|u\|_{\mathrm{H}_0^1} \|v\|_{\mathrm{H}_0} \qquad u\,,v \in \mathrm{H}_0^1.$$

Dopo di che, con gli stessi ragionamenti fatti alla fine del Teorema II si perviene alla conclusione.

Bibliografia

[1] Peetre J., *Rectification à l'article: Une caractérisation abstraite des operateurs differentiels*, «Math. Scand.», *8* (1), 116–120 (1960).

[2] Schwartz L., *Espaces de functions différentiables à valeurs vectorielles*, « J. d'Analyse Math. », *4*, 88–148 (1954–55).

[3] Schwartz L., *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1966.

[4] Spagnolo S., *Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del 2° ordine a coefficienti misurabili e limitati*, « Rend. Sem. Mat. Un. Padova », *39*, 56–64 (1967).

[5] Nirenberg L., *On elliptic partial differential equations* (*Lecture II*), « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », *13* (1959).