Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Placido Cicala

Un controllo dei metodi di discretizzazione per il guscio elastico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.2, p. 228–231.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_2_228_0>

Meccanica. — *Un controllo dei metodi di discretizzazione per il guscio elastico.* Nota [(*)] del Socio PLACIDO CICALA.

SUMMARY. — A numerical accuracy test for finite element or finite difference methods in linear shell problems is suggested.

1. La convergenza dei metodi di risoluzione per elementi finiti dei problemi elastici viene generalmente esaminata (ad esempio [1, 2]) sottoponendo le equazioni a cui essi conducono al controllo in uso per le equazioni alle differenze finite, fondato sugli sviluppi in serie di Taylor. Per la piastra, con elementi finiti a deformazioni compatibili o tensioni equilibrate, risultati più conclusivi sono stati ottenuti (ad esempio [3]) dall'indagine basata sulle proprietà di minima energia. D'altra parte, da queste analisi per l'una o l'altra via è difficile desumere indicazioni quantitative sugli errori relativi, nella cui valutazione (sempre in forte eccesso) intervengono derivate di ordine elevato delle funzioni incognite. Per la complessità di queste indagini nelle strutture a guscio, rette nell'ordinaria schematizzazione da un sistema differenziale di 8° ordine, si ricorre spesso a controlli empirici: si ripete il calcolo con frazionamento variato o se ne confrontano i risultati con quelli di calcolazioni presumibilmente più precise (ad esempio [4]).

Nella presente Nota si propone un controllo per le discretizzazioni mediante differenze o elementi finiti, delle equazioni del guscio elastico, fondato sul confronto con la soluzione esatta, per un problema tipico già usato per l'esame delle trattazioni del guscio come continuo.

2. Si consideri un guscio cilindrico di spessore uniforme h; nel cilindro medio, circolare di raggio R, si misurano le coordinate $R\xi_1$ secondo le generatrici e $R\xi_2$ in direzione ortogonale. Si prendono in esame le soluzioni del problema bidimensionale ($h \to 0$) per le quali ognuna delle variabili (o la sua derivata rispetto a ξ_2) sia espressa nella forma

$$v_j = V_j \cos n\xi_2 \tag{1}$$

essendo n costante e V_j funzione di ξ_1. Nella discretizzazione si fissano sezioni normali del cilindro con intervalli $\Delta\xi_1$ costanti. Detto V_j^0 il valore di V_j nella sezione $\xi_1 = 0$, con notazione complessa il valore nella sezione $\xi_1 = m\Delta\xi_1$ si scrive

$$V_j = V_j^0 \, p^m \, . \tag{2}$$

(*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1973.

Per la discretizzazione in esame, sostituite nelle relative equazioni le espressioni (1), (2), si constaterà che le funzioni di ξ_2 siano eliminabili come fattori comuni. Si ottiene così un sistema lineare omogeneo nelle ampiezze V_j^0; gli autovalori p sono le radici dell'equazione che si scrive annullando il determinante.

Quando il procedimento in esame sia programmato su calcolatore e si intenda evitare il calcolo analitico anzidetto, si può giungere ai valori p valendosi del programma stesso per determinare le ampiezze V_j^0 corrispondenti ad assegnate condizioni sulle sezioni $\xi_1 = \pm \Delta\xi_1$. Siano v_{jk}^+, v_{jk}^- i valori di V_j^0 che si ottengono ponendo $V_k = 1$ nelle sezioni $\xi_1 = \pm \Delta\xi_1$ rispettivamente e fissando valori nulli per le altre variabili atte a definire la soluzione. Se il procedimento discretizzato è in accordo con l'ordinaria formulazione differenziale, a definire una soluzione potranno fissarsi sulle due sezioni 4 variabili, alle quali si assegnano indici j, k da 1 a 4. Per la linearità del problema, la soluzione del tipo (2) verificherà le equazioni

$$V_j^0 = \sum_{k=1}^{4} \left(p v_{jk}^+ + \frac{1}{p} v_{jk}^-\right) V_k^0 \qquad (j = 1 \div 4) . \tag{3}$$

La condizione di compatibilità delle (3) fornisce gli autovalori p. Si osserva che, per la simmetria strutturale, è

$$v_{jk}^+/v_{jk}^- = v_{kj}^+/v_{kj}^- = \pm 1 \tag{4}$$

il segno dipendendo dalla scelta delle variabili. Di conseguenza risulta che l'equazione in p ha coppie di radici reciproche.

I valori ottenuti saranno da confrontare con quelli che si ricavano, con le stesse posizioni (1), (2) dove è da sostituire m con $\xi_1/\Delta\xi_1$, dal sistema differenziale. L'equazione risultante, ridotta agli operatori, applicabile ad una variabile qualsiasi può scriversi

$$[(X + Y)^2 + 2X + Y]^2 = -K^4 X^2 \tag{5}$$

essendo

$$X = \partial^2/\partial\xi_1^2 \quad , \quad Y = \partial^2/\partial\xi_2^2 \quad , \quad K^4 = 12(1 - \nu^2)R^2/h^2$$

e ν il coefficiente di Poisson.

3. La (5) vale, con errore relativo $O(h/R)$ [5] per qualsiasi valore di n da O fino all'ordine di K. Per esemplificazione si fa qui riferimento a questa ultima condizione, ossia alla classe di soluzioni per le quali, per $h \to 0$, mantenga valore finito il rapporto R/hn^2, soluzioni rette in prima approssimazione dalle equazioni di Donnell–Jenkins–Kármán. Qui la (5) si riduce alla equazione

$$(X + Y)^4 = -K^4 X^2 . \tag{6}$$

In base a questa, uno dei valori p è dato dalla relazione

$$\text{(7)} \qquad \ln p_1 = -[(\sqrt{4+C^4}+2)^{1/2}+i(\sqrt{4+C^4}-2)^{1/2}+C(1+i)]\,\vartheta_1/2$$

dove $\vartheta_1 = n\Delta\xi_1$, $C = K/\sqrt{2n}$. Dalla (7), cambiando segno a C, si ha l'altra radice p_2: ambedue hanno moduli < 1, ossia corrispondono a soluzioni che tendono a smorzarsi col crescere di ξ_1. Unendo a queste le reciproche, si hanno (con le coniugate) le otto soluzioni.

Dalla trattazione mediante differenze finite centrali con errori $O(\Delta^2)$ si ha formalmente la medesima (6) con

$$\text{(8)} \qquad \frac{X}{n^2} = \frac{p-2+1/p}{\vartheta_1^2} \quad , \quad \frac{Y}{n^2} = 2\,\frac{\cos\vartheta_2 - 1}{\vartheta_2^2}$$

essendo $\vartheta_2 = n\Delta\xi_2$. Una trattazione più precisa per le soluzioni considerate è stata sviluppata da Giencke [6] con un geniale procedimento di discretizzazione che conduce ad espressioni delle derivate seconde coincidenti con quelle del metodo plurilocale [7] con errori $O(\Delta^4)$. Sviluppando i calcoli si giunge ancora alla (6) con le specificazioni

$$\text{(9)} \qquad \frac{X}{n^2} = \frac{p-2+1/p}{\vartheta_1^2}\,\frac{12}{p+10+1/p} \quad , \quad \frac{Y}{n^2} = \frac{12}{\vartheta_2^2}\,\frac{\cos\vartheta_2 - 1}{5+\cos\vartheta_2}\,.$$

I risultati di calcolazioni effettuate per $C = 1$ [(1)] vengono qui riportati, indicando per ciascun caso, insieme ai valori assunti per ϑ_1 e ϑ_2, l'espressione, (7), (8) o (9), su cui si basa il calcolo. Il valore p_1 si riferisce alla soluzione a variazione più rapida, mentre p_2 si riferisce alla soluzione che, col crescere di C, si accosta alla teoria di Vlasof del cilindro lungo [8]: a questa si arriva precisamente cancellando i termini in X dal primo membro della (5).

(7) , $\vartheta_1 = \pi/4$	$p_1 = 0{,}25112 - 0{,}16579\,i$,	$p_2 = 0{,}64658 + 0{,}13235\,i$
(8) , $\vartheta_1 = \pi/4$, $\vartheta_2 = 0$	$p_1 = 0{,}27179 - 0{,}14890\,i$,	$p_2 = 0{,}64770 + 0{,}12992\,i$
(9) , $\vartheta_1 = \pi/4$, $\vartheta_2 = 0$	$p_1 = 0{,}25130 - 0{,}16832\,i$,	$p_2 = 0{,}64659 + 0{,}13237\,i$
(8) , $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi/4$	$p_1 = 0{,}27508 - 0{,}15284\,i$,	$p_2 = 0{,}66009 + 0{,}12965\,i$
(9) , $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi/4$	$p_1 = 0{,}25143 - 0{,}16845\,i$,	$p_2 = 0{,}64699 + 0{,}13236\,i$
(7) , $\vartheta_1 = \pi/8$	$p_1 = 0{,}52537 - 0{,}15778\,i$,	$p_2 = 0{,}80826 + 0{,}08187\,i$
(8) , $\vartheta_1 = \pi/8$, $\vartheta_2 = 0$	$p_1 = 0{,}52875 - 0{,}15211\,i$,	$p_2 = 0{,}80839 + 0{,}08148\,i$
(9) , $\vartheta_1 = \pi/8$, $\vartheta_2 = 0$	$p_1 = 0{,}52543 - 0{,}15792\,i$,	$p_2 = 0{,}80826 + 0{,}08187\,i$
(8) , $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi/8$	$p_1 = 0{,}52983 - 0{,}15278\,i$,	$p_2 = 0{,}81030 + 0{,}08123\,i$
(9) , $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi/8$	$p_1 = 0{,}52544 - 0{,}15792\,i$,	$p_2 = 0{,}80827 + 0{,}08187\,i$.

(1) I calcoli vennero svolti dagli ingg. F. Algostino e C. Bosco.

4. Il procedimento suggerito fornisce un controllo per i metodi discretizzati di calcolo delle strutture a guscio, mediante elaborazione algebrica delle relative equazioni o anche solo con l'uso della programmazione preparata per le applicazioni. Naturalmente in questo sondaggio conviene separare gli effetti delle semplificazioni inerenti alla formulazione bidimensionale a cui quelle equazioni portano per $\Delta \to 0$. Per questo, se non si conduce algebricamente l'indagine sull'equazione risultante, si dovrà disporre di calcolazioni numeriche abbastanza precise da permettere di individuare il comportamento degli autovalori al limite $\Delta \to 0$. In ogni caso, con calcoli più semplici che per ogni altra applicazione, si può giungere alla valutazione dell'errore di discretizzazione e dell'incidenza su questo dei vari affinamenti. Così dai valori sopra riportati si desumono indicazioni sull'influenza di un frazionamento più o meno grossolano (come rivelato dallo scarto rispetto a 1 del modulo di p_1) e sugli effetti dell'affinamento rispetto alle più semplici differenze centrali, rappresentato dalla riduzione dell'ordine di errore da Δ^2 a Δ^4. Il controllo suggerito è anche applicabile a maglie regolari più generali di quella rettangolare sopra considerata. Poichè, mediante combinazione delle soluzioni che si hanno dalle (1) e (2) con gli autovalori calcolati, è facile attuare prefissate condizioni sulle sezioni estreme per un tronco di guscio cilindrico, si può estendere l'esame ai problemi al contorno; in questi, per maggiore evidenza di risultati è opportuno riferirsi al guscio semindefinito. L'indagine può essere estesa anche a discretizzazioni tridimensionali utilizzando la classica soluzione di Pochhammer–Lamb–Chree.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. E. WALZ, R. E. FULTON e N. J. CYRUS, *Accuracy and convergence of finite element approximations*, « Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech. », 995–1027, AFFDL–TR–68–150, Dayton, Ohio, 1969.

[2] YOSHIYUKI YAMAMOTO e NAOAKI TOKUDA, *A note on convergence of finite element solutions*, « Int. J. Num. Meth. Engng. », *3*, 485–493 (1971).

[3] M. ZLÁMAL, *On the finite element method*, « Num. Math. », *12*, 394–409 (1968).

[4] K. FORSBERG, *An evaluation of finite difference and finite element techniques for analysis of general shells*, « Proc. Symp. I.U.T.A.M. », 837–859, Liège 1971.

[5] P. CICALA, A. M. SASSI PERINO e G. SINISCALCO, *Parametric expansions in the linear theory of cylindrical shells*, « Meccanica », 126–133 (1967).

[6] E. GIENCKE, *The mechanical interpretation of high accuracy multipoint difference methods for plates and shells*, « Proc. Symp. I.U.T.A.M. », 809–836, Liège 1971.

[7] L. COLLATZ, *The numerical treatment of differential equations*, Springer, Berlin 1960.

[8] W. Z. WLASSOF, *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendungen in der Technik*, IV Teil, Akademie Verlag, Berlin 1958.