Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Corneliu Ursescu

Sur une généralisation dè la notion de différentiabilité

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.2, p. 199–204.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_2_199_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Analisi funzionale. — *Sur une généralisation de la notion de différentiabilité.* Nota di CORNELIU URSESCU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Viene introdotto e studiato un tipo di differenziale utilizzato nei problemi di controllo ed ottimizzazione. Tale tipo risulta intermedio fra quelli dovuti a Fréchet ed a Gâteaux.

1. Le but de ce travail est l'étude d'une différentielle utile dans les problèmes d'optimisation et de control. Des ensembles du type $K_{X_0}(x_0)$ (voir la Définition 1) se rencontrent dans [1] (ensemble des variations admissibles pour une restriction de type égalité) et [2] (cône tangent). Des fonctions du type $D_f(x_0)$ (voir la Définition 3) se rencontrent dans [2] (Chapitre 1, formule (11.1)), [3] (formule (2.2)) et [4] (formule (6.6)).

La comparaison entre la différentiabilité dans le sens de la Définition 2 et la différentiabilité Gâteaux et Fréchet est possible seulement si le point x_0 est intérieur à l'ensemble X_0. Dans ce cas, dans [4] on démontre que la différentiabilité Gâteaux est plus faible et la différentiabilité Fréchet est plus forte.

2. Soient X un espace vectoriel topologique sur R, $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de l'origine de X et $x_0 \in X_0 \subseteq X$.

DÉFINITION 1. $K_{X_0}(x_0)$ *est l'ensemble de points* $x \in X$ *qui ont la propriété*:

pour tout $r > 0$ *et* $V \in \mathcal{V}$ *il existe* $s \in (0, r)$ *et* $v \in V$ *tels que* $x_0 + s(x + v) \in X_0$.

PROPOSITION 1. *L'ensemble* $K_{X_0}(x_0)$ *est un cône pointé, fermé.*

Démonstration. Montrons que l'ensemble $K_{X_0}(x_0)$ est un cône. Soient $t > 0$ et $x \in K_{X_0}(x_0)$. Montrons que $tx \in K_{X_0}(x_0)$. Soient $r > 0$ et $V \in \mathcal{V}$. Il existe $s \in (0, tr)$ et $v \in (1/t)V$ tels que $x_0 + s(x + v) \in X_0$ (Définition 1). Alors $(s/t) \in (0, r)$, $tv \in V$ et $x_0 + (s/t)(tx + tv) \in X_0$ donc $tx \in K_{X_0}(x_0)$ (Définition 1).

Montrons, maintenant, que le cône $K_{X_0}(x_0)$ est pointé, c'est-à-dire que $0 \in K_{X_0}(x_0)$. Soient $r > 0$ et $V \in \mathcal{V}$. Alors $(r/2) \in (0, r)$, $0 \in V$ et $x_0 + (r/2)(0 + 0) \in X_0$ donc $0 \in K_{X_0}(x_0)$ (Définition 1).

Montrons, enfin, que l'ensemble $K_{X_0}(x_0)$ est fermé. Soit x appartenant à l'adhérence de $K_{X_0}(x_0)$. Montrons que $x \in K_{X_0}(x_0)$. Soient $r > 0$ et $V \in \mathcal{V}$. On trouve $V' \in \mathcal{V}$ tel que $V' + V' \subseteq V$. Il y a $v' \in V'$ tel que $x + v' \in K_{X_0}(x_0)$. Il existe (Définition 1) $s \in (0, r)$ et $v'' \in V'$ tels que $x_0 + s(x + v' + v'') \in X_0$.

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1973.

Posons $v = v' + v''$. Alors $v \in V$ et $x_0 + s(x+v) \in X_0$, donc $x \in K_{X_0}(x_0)$ (Définition 1).

PROPOSITION 2. *Soient* $x_0 \in X_1 \subseteq X_2$. *Alors on a*:

$$K_{X_1}(x_0) \subseteq K_{X_2}(x_0).$$

Démonstration. Soit $x \in K_{X_1}(x_0)$. Montrons que $x \in K_{X_2}(x_0)$. Soient $r > 0$ et $V \in \mathfrak{V}$. Il existe $s \in (0, r)$ et $v \in V$ tels que $x_0 + s(x+v) \in X_1$ (Définition 1). Alors $x_0 + s(x+v) \in X_2$ donc $x \in K_{X_2}(x_0)$ (Définition 1).

PROPOSITION 3. *Soient* $X = \prod_{i\in I} X^i$, $X_0 = \prod_{i \in I} X_0^i$ *et* $x_0 = (x_0^i)_{i\in I}$, *où* I *est un ensemble d'indices* i *et pour tout* $i \in I$, X^i *est un espace vectoriel topologique sur* R *et* $x_0^i \in X_0^i \subseteq X^i$. *Alors on a*:

$$K_{X_0}(x_0) \subseteq \prod_{i\in I} K_{X_0^i}(x_0^i).$$

Démonstration. Soit $x \in K_{X_0}(x_0)$. Montrons que $x \in \prod_{i\in I} K_{X_0^i}(x_0^i)$. Posons $x = (x^i)_{i\in I}$. Soit $i \in I$. Montrons que $x^i \in K_{X_0^i}(x_0^i)$. Soient $r > 0$ et $V^i \in \mathfrak{V}^i$, où $\mathfrak{V}^i$ est l'ensemble des voisinages de l'origine de X^i. Posons $V^j = X^j$ pour $j \neq i$ et $V = \prod_{j\in I} V^j$. Il existe $s \in (0, r)$ et $v \in V$ tels que $x_0 + s(x+v) \in X_0$ (Définition 1). Posons $v = (v^j)_{j\in I}$. Alors $v^i \in V^i$ et $x_0^i + s(x^i + v^i) \in X_0^i$ donc $x^i \in K_{X_0^i}(x_0^i)$ (Définition 1).

3. Soient Y un espace vectoriel topologique sur R, séparé, $\mathfrak{W}$ l'ensemble des voisinages de l'origine de Y et $f : X_0 \to Y$.

DÉFINITION 2. *La fonction* f *est différentiable en* $x_0 \in X_0$ *si pour tout* $x \in K_{X_0}(x_0)$ *il existe au moins un* $y \in Y$ *qui a la propriété*:

pour tout $W \in \mathfrak{W}$ *il existe* $r > 0$ *et* $V \in \mathfrak{V}$ *tels que si* $s \in (0, r)$, $v \in V$ *et* $x_0 + s(x+v) \in X_0$ *alors* $f(x_0 + s(x+v)) \in f(x_0) + s(y + W)$.

PROPOSITION 4. *Soit* f *différentiable en* x_0. *Alors pour tout* $x \in K_{X_0}(x_0)$ *il existe au plus un* $y \in Y$ *qui a la propriété de la Définition* 2.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe au moins deux éléments $y_1 \in Y$ et $y_2 \in Y$ qui ont la propriété de la Définition 2. On trouve $W \in \mathfrak{W}$ tel que $(y_1 + W) \cap (y_2 + W) = \varnothing$. Pour tout $i = 1, 2$ il existe $r_i > 0$ et $V_i \in \mathfrak{V}$ tels que si $s \in (0, r_i)$, $v \in V_i$ et $x_0 + s(x+v) \in X_0$ alors $f(x_0 + s(x+v)) \in f(x_0) + s(y_i + W)$ (Définition 2). Posons $r = \min(r_1, r_2)$ et $V = V_1 \cap V_2$. Il existe $s \in (0, r)$ et $v \in V$ tels que $x_0 + s(x+v) \in X_0$ (Définition 1). Alors $(1/s)(f(x_0 + s(x+v)) - f(x_0)) \in (y_1 + W) \cap (y_2 + W)$ ce qui est absurde.

DÉFINITION 3. *Soit* f *différentiable en* x_0. *Alors la fonction* $D_f(x_0) : K_{X_0}(x_0) \to Y$, *où pour tout* $x \in K_{X_0}(x_0)$, $D_f(x_0)(x)$ *est l'unique élément de* Y *qui a la propriété de la Définition* 2, *est la différentielle de* f *en* x_0.

PROPOSITION 5. *Soit f différentiable en x_0. Alors on a:*

$$\mathrm{gr}\,(D_f(x_0)) = K_{\mathrm{gr}(f)}\,(x_0\,, f(x_0))$$

où $\mathrm{gr}\,(f)$ *est le graphe de* f.

Démonstration. Soient $(x\,,y) \in \mathrm{gr}\,(D_f(x_0))$, c'est-à-dire $x \in K_{X_0}(x_0)$ et $y = D_f(x_0)\,(x)$. Montrons que $(x\,,y) \in K_{\mathrm{gr}(f)}(x_0\,,f\,(x_0))$. Soient $r > 0$, $V \in \mathcal{V}$ et $W \in \mathcal{W}$. On peut supposer par suite de la Définition 3, en diminuant éventuellement r et V, que si $s \in (0\,,r)$, $v \in V$ et $x_0 + s\,(x + v) \in X_0$ alors $f\,(x_0 + s\,(x + v)) \in f\,(x_0) + s\,(D_f(x_0)\,(x) + W)$. Il existe $s \in (0\,,r)$ et $v \in V$ tels que $x_0 + s\,(x + v) \in X_0$ (Définition 1) et $w \in W$ tel que $f\,(x_0 + s\,(x + v)) = f\,(x_0) + s\,(D_f(x_0)\,(x) + w)$. Alors $(x_0\,,f\,(x_0)) + s\,((x\,,y) + (v\,,w)) \in \mathrm{gr}\,(f)$ donc $(x\,,y) \in K_{\mathrm{gr}(f)}(x_0\,,f\,(x_0))$ (Définition 1).

Soit, maintenant, $(x\,,y) \in K_{\mathrm{gr}(f)}(x_0\,,f\,(x_0))$. Montrons que $(x\,,y) \in \mathrm{gr}\,(D_f(x_0))$, c'est-à-dire que $x \in K_{X_0}(x_0)$ et $y = D_f(x_0)\,(x)$. Puisque $\mathrm{gr}\,(f) \subseteq X_0 \times Y$, on a $(x\,,y) \in K_{X_0 \times Y}(x_0\,,f\,(x_0))$ (Proposition 2) donc $x \in K_{X_0}(x_0)$ (Proposition 3). Montrons maintenant que $y = D_f(x_0)\,(x)$. Supposons par l'absurde que $y \neq D_f\,(x_0)\,(x)$. On trouve $W \in \mathcal{W}$ tel que $(y + W) \cap (D_f(x_0)\,(x) + W) = \varnothing$. Il existe $r > 0$ et $V \in \mathcal{V}$ tels que si $s \in (0\,,r)$, $v \in V$ et $x_0 + s\,(x + v) \in X_0$ alors $f\,(x_0 + s\,(x + v)) \in f\,(x_0) + s\,(D_f(x_0)\,(x) + W)$ (Définition 3). Il y a $s \in (0\,,r)$, $v \in V$ et $w \in W$ tels que $(x_0\,,f\,(x_0)) + s\,((x\,,y) + s\,(v\,,w)) \in \mathrm{gr}\,(f)$ (Définition 1), c'est-à-dire $x_0 + s\,(x + v) \in X_0$ et $f\,(x_0 + s\,(x + v)) = f\,(x_0) + s\,(y + w)$. Alors $(1/s)\,(f\,(x_0 + s\,(x + v)) - f\,(x_0)) \in (y + W) \cap (D_f(x_0)\,(x) + W)$ ce qui est absurde.

PROPOSITION 6. *Soit f différentiable en x_0. Alors l'ensemble* $\mathrm{gr}\,(D_f(x_0))$ *est fermé et pour tout $t \geq 0$ et $x \in K_{X_0}(x_0)$ on a:*

$$tD_f(x_0)\,(x) = D_f(x_0)\,(tx)\,.$$

Démonstration. D'après les Propositions 1 et 5, il résulte que le graphe de la fonction $D_f(x_0)$ est fermé. Soit maintenant $t \geq 0$ et $x \in K_{X_0}(x_0)$. Alors $(x\,,D_f(x_0)\,(x)) \in K_{\mathrm{gr}(f)}(x_0\,,f(x_0))$ (Proposition 5), $(tx\,,tD_f(x_0)\,(x)) \in K_{\mathrm{gr}(f)}(x_0\,,f(x_0))$ (Proposition 1) et $tD_f(x_0)\,(x) = D_f(x_0)\,(tx)$ (Proposition 5).

PROPOSITION 7. *Soit f différentiable en x_0. Alors $D_f(x_0)$ est continue sur $K_{X_0}(x_0)$.*

Démonstration. Soit $x \in K_{X_0}(x_0)$. Montrons que $D_f(x_0)$ est continue en x. Soit $W \in \mathcal{W}$. On trouve $W' \in \mathcal{W}$ tel que $W' - W' \subseteq W$. Il existe $r' > 0$ et $V' \in \mathcal{V}$ tels que si $s \in (0\,,r')$, $v \in V'$ et $x_0 + s\,(x + v) \in X_0$ alors $f\,(x_0 + s\,(x + v)) \in f\,(x_0) + s\,(D_f(x_0)\,(x) + W')$ (Définition 3). On trouve $V \in \mathcal{V}$ tel que $V + V \subseteq V'$. Soit $v \in V$ et $x + v \in K_{X_0}(x_0)$. Montrons que $D_f(x_0)\,(x + v) \in D_f(x_0)\,(x) + W$. On a $(x + v\,,D_f(x_0)\,(x + v)) \in K_{\mathrm{gr}(f)}(x_0\,,f(x_0))$ (Proposition 5), donc il existe $s \in (0\,,r')$, $v' \in V$ et $w \in W'$ tels que $(x_0\,,f\,(x_0)) + s\,((x + v\,,D_f(x_0)\,(x + v)) + (v'\,,w)) \in \mathrm{gr}\,(f)$ (Définition 1) c'est-à-dire $x_0 + s\,(x + v + v') \in X_0$ et $f(x_0 + s\,(x + v + v')) = f(x_0) + s\,(D_f(x_0)\,(x + v) + w)$.

Mais $v + v' \in V'$ donc $f(x_0 + s(x + v + v')) \in f(x_0) + s(D_f(x_0)(x) + W')$. Pour conclure $D_f(x_0)(x + v) \in D_f(x_0)(x) + W' - W' \subseteq D_f(x_0)(x) + W$.

PROPOSITION 8. *Soit f différentiable en x_0. Alors pour tout ensemble compact $M \subseteq K_{X_0}(x_0)$ et $W \in \mathcal{W}$, il existe $r > 0$ et $V \in \mathcal{V}$ tels que si $x \in M$, $s \in (0, r)$, $v \in V$ et $x_0 + s(x + v) \in X_0$ alors $f(x_0 + s(x + v)) \in f(x_0) + s(D_f(x_0)(x) + W)$.*

Démonstration. Soient $M \subseteq K_{X_0}(x_0)$ un ensemble compact et $W \in \mathcal{W}$. Il existe $W' \in \mathcal{W}$ tel que $W' - W' \subseteq W$. Pour tout $x \in M$ il existe $r'_x > 0$ et $V'_x \in \mathcal{V}$ tels que:

1) si $s \in (0, r'_x)$, $v \in V'_x$ et $x_0 + s(x + v) \in X_0$ alors $f(x_0 + s(x + v)) \in f(x_0) + s(D_f(x_0)(x) + W')$ (Définition 3);

2) si $v \in V'_x$ et $x + v \in K_{X_0}(x_0)$ alors $D_f(x_0)(x + v) \in D_f(x_0)(x) + W'$ (Proposition 7).

On trouve $V_x \in \mathcal{V}$ tel que $V_x + V_x \subseteq V'_x$. Il y a un ensemble fini $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq M$ tel que $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i})$. Posons $r = \min_i r'_{x_i}$ et $V = \bigcap_i V_{x_i}$. Soient $x \in M$, $s \in (0, r)$, $v \in V$ et $x_0 + s(x + v) \in X_0$. Il existe un indice i et $v_i \in V_{x_i}$ tels que $x = x_i + v_i$. Puisque $s \in (0, r'_{x_i})$ et $v_i + v \in V'_{x_i}$, on a $f(x_0 + s(x_i + v_i + v)) \in f(x_0) + s(D_f(x_0)(x_i) + W')$. Puisque $v_i \in V'_{x_i}$, on a $D_f(x_0)(x_i + v_i) \in D_f(x_0)(x_i) + W'$. Pour conclure $f(x_0 + s(x + v)) \in f(x_0) + s(D_f(x_0)(x) + W' - W') \subseteq f(x_0) + s(D_f(x_0)(x) + W)$.

PROPOSITION 9. *Soit f différentiable en x_0. Alors on a:*

$$D_f(x_0)(K_{X_0}(x_0)) \subseteq K_{f(X_0)}(f(x_0)).$$

Démonstration. Soit $y \in D_f(x_0)(K_{X_0}(x_0))$. Montrons que $y \in K_{f(X_0)}(f(x_0))$. Il existe $x \in K_{X_0}(x_0)$ tel que $y = D_f(x_0)(x)$. Alors $(x, y) \in K_{\mathrm{gr}(f)}(x_0, f(x_0))$ (Proposition 5). Puisque $\mathrm{gr}(f) \subseteq X \times f(X_0)$, on a $(x, y) \in K_{X \times f(X_0)}(x_0, f(x_0))$ (Proposition 2) donc $y \in K_{f(X_0)}(f(x_0))$ (Proposition 3).

PROPOSITION 10. *Soient $Y = \prod_{i \in I} Y^i$ et $f = (f^i)_{i \in I}$ où I est un ensemble d'indices i et pour tout $i \in I$, Y^i est un espace vectoriel topologique sur R, séparé et $f^i : X_0 \to Y^i$. Alors la fonction f est différentiable en x_0 si et seulement si pour tout $i \in I$ la fonction f^i est différentiable en x_0. En ce cas on a:*

$$D_f(x_0) = (D_{f^i}(x_0))_{i \in I}.$$

Démonstration. Soit f différentiable en x_0. Soit $i \in I$. Montrons que f^i est différentiable en x_0. Soit $x \in K_{X_0}(x_0)$. Posons $D_f(x_0)(x) = (y^j)_{j \in I}$. Soit $W^i \in \mathcal{W}^i$ où $\mathcal{W}^i$ est l'ensemble des voisinages de l'origine de Y^i. Posons $W^j = Y^j$ pour $j \neq i$ et $W = \prod_{j \in I} W^j$. Il existe $r > 0$ et $V \in \mathcal{V}$ tels que si $s \in (0, r)$, $v \in V$ et $x_0 + s(x + v) \in X_0$ alors $f(x_0 + s(x + v)) \in f(x_0) + s(D_f(x_0)(x) + W)$ (Définition 3) donc $f^i(x_0 + s(x + v)) \in f^i(x_0) +$

$+ s(y^i + W^i)$, ce que signifie que f^i est différentiable en x_0 (Définition 2) et $D_{f^i}(x_0)(x) = y^i$ (Définition 3).

Soit, maintenant, f^i différentiable en x_0 pour tout $i \in I$. Montrons que f est différentiable en x_0. Soit $x \in K_{X_0}(x_0)$. Posons $y = (D_{f^i}(x_0)(x))_{i \in I}$. Soit $W \in \mathfrak{W}$. On peut supposer, en diminuant éventuellement W, que $W = \prod_{i \in I} W^i$ où pour tout $i \in I$ on a $W^i \in \mathfrak{W}^i$ et, à l'exception d'un ensemble fini J d'indices i, on a $W^i = Y^i$. Pour tout $i \in J$ il existe $r^i > 0$ et $V^i \in \mathfrak{V}$ tels que si $s \in (0, r^i)$, $v \in V^i$ et $x_0 + s(x+v) \in X_0$ alors $f^i(x_0 + s(x+v)) \in f^i(x_0) + s(D_{f^i}(x_0)(x) + W^i)$ (Définition 3). Posons $r = \min_{i \in J} r^i$ et $V = \bigcap_{i \in J} V^i$. Soient $s \in (0, r)$, $v \in V$ et $x_0 + s(x+v) \in X_0$. Alors $f^i(x_0 + s(x+v)) \in f^i(x_0) + s(D_{f^i}(x_0)(x) + W^i)$ pour $i \in J$, puisque $s \in (0, r^i)$ et $v \in V^i$, ainsi que pour $i \notin J$, puisque $W^i = Y^i$. Pour conclure $f(x_0 + s(x+v)) \in f(x_0) + s(y + W)$ donc f est différentiable en x_0 (Définition 2) et $D_f(x_0)(x) = y$ (Définition 3).

PROPOSITION 11. *Soit f différentiable en x_0. Alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Soit $W \in \mathfrak{W}$. On peut supposer, en diminuant éventuellement W, que l'ensemble W est équilibré. Puisque $0 \in K_{X_0}(x_0)$ (Proposition 1) et $D_f(x_0)(0) = 0$ (Proposition 6), il existe $r > 0$ et $V' \in \mathfrak{V}$ tels que si $s \in (0, r)$, $v' \in V'$ et $x_0 + sv' \in X_0$ alors $f(x_0 + sv') \in f(x_0) + sW$. On peut supposer, en diminuant éventuellement r, que $r \leq 2$. Posons $V = (r/2)V'$. Soit $v \in V$ et $x_0 + v \in X_0$. Montrons que $f(x_0 + v) \in f(x_0) + W$. On trouve $v' \in V'$ tel que $v = (r/2)v'$. Alors $f(x_0 + v) = f(x_0 + (r/2)v') \in f(x_0) + (r/2)W \subseteq \subseteq f(x_0) + W$.

4. Soient $Y_0 \subseteq Y$, Z un second espace vectoriel topologique sur R, séparé, $\mathfrak{U}$ l'ensemble des voisinages de l'origine de Z et $g : Y_0 \to Z$.

PROPOSITION 12. *Soient $f(X_0) \subseteq Y_0$ et f différentiable en x_0. Alors on a:*

$$D_f(x_0)(K_{X_0}(x_0)) \subseteq K_{Y_0}(f(x_0)).$$

Soit, en outre, g différentiable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et on a:

$$D_{g \circ f}(x_0) = D_g(f(x_0)) \circ D_f(x_0).$$

Démonstration. Soit $x \in K_{X_0}(x_0)$. Posons $y = D_f(x_0)(x)$. Alors $y \in \in K_{f(X_0)}(f(x_0))$ (Proposition 9) donc $y \in K_{Y_0}(f(x_0))$ (Proposition 2). Posons $z = D_g(f(x_0))(y)$. Soit $U \in \mathfrak{U}$. Il existe $r > 0$ et $W \in \mathfrak{W}$ tels que si $s \in (0, r)$, $w \in W$ et $f(x_0) + s(y + w) \in Y_0$ alors $g(f(x_0) + s(y + w)) \in g(f(x_0)) + s(z + U)$ (Définition 3). On peut supposer, en diminuant éventuellement r, qu'il existe $V \in \mathfrak{V}$ tel que si $s \in (0, r)$, $v \in V$ et $x_0 + s(x+v) \in X_0$ alors $f(x_0 + s(x+v)) \in f(x_0) + s(y + W)$ (Définition 3). Soient $s \in (0, r)$, $v \in V$ et $x_0 + s(x+v) \in X_0$. Il y a $w \in W$ tel que $f(x_0 + s(x+v)) = f(x_0) +$

$+ s(y+w)$. Puisque $f(x_0) + s(y+w) \in Y_0$, on a $g(f(x_0 + s(x+v))) \in$ $\in g(f(x_0)) + s(z+U)$ donc $g \circ f$ est différentiable en x_0 (Définition 2) et $D_{g \circ f}(x_0)(x) = z$ (Définition 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. JA. DUBOVICKII et A. A. MILJUTIN, *Zadači na ekstremum pri naličii ogranicenii*, « Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz. », 5, 395–453 (1965).

[2] M. R. HESTENES, *Calculus of variations and optimal control theory*, John Wiley, New York 1966.

[3] L. W. NEUSTADT, *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems. I. General theory.*, « SIAM J. on Control », 4, 505–527 (1966).

[4] L. W. NEUSTADT, *A general theory of extremals*, « J. Comput. System Sci. », 3, 57–92 (1969).