Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Leonida E. Krivoshein, Demetrio Mangeron, Mehmet Namik Oguztoreli

Studi concernenti certe estensioni delle equazioni integro-differenziali di Volterra. - I. Problemi di valori iniziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.2, p. 187–192.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_2_187_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Analisi matematica. — *Studi concernenti certe estensioni delle equazioni integro–differenziali di Volterra. – I. Problemi di valori iniziali* (*). Nota di LEONIDA E. KRIVOSHEIN (1), DEMETRIO MANGERON (2,3) e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI (4), presentata (**) dal Socio P. PICONE.

SUMMARY. — In the framework of the authors' research papers devoted to studies concerning various non linear integro-differential equations of Volterra and Picone's types [7], [8], an initial value problem concerning a new extension of Volterra's integro-differential equations is considered and the existence, the unicity and the stability of its solution is proved.

1. Larghissimi orizzonti nel campo delle applicazioni del calcolo ai fenomeni fisici e meccanici che avevano aperto a Vito Volterra, uno dei maggiori matematici che l'Italia abbia mai avuto, i suoi insigni Maestri nella Scuola Normale Superiore di Pisa, l'hanno portato dal concetto di funzionale alle sue più ampie e fondamentali ricerche d'analisi concernenti le equazioni integrali ed integro–differenziali ove culmina la sua genialità analitica, a cui si univa nel Volterra il fisico matematico, il meccanico, il biologo, lo scienziato che vede l'imperiosa necessità di approfondire i problemi del mondo fisico tramite applicazione dei metodi dell'analisi, e la cui opera è tutt'ora ampliata e approfondita dall'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone, fondatore e promotore dell' « Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo » [1], [2].

Nella sua conferenza, rimasta indelebile per la totalità dell'uditorio [3], tenutasi a Iaşi, parallelamente con la pubblicazione di una serie di lavori dovuti all'Illustre e Geniale scomparso e concernenti la *teoria matematica sulla lotta per l'esistenza* e la *teoria matematica dei fenomeni ereditari* [4], [5],

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada Grant NRC–A4345 through the University of Alberta.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1972.

(1) Kirghizian State University, Frunze, U.S.S.R., Kirg. S.S.R.

(2) Istituto Politecnico di Iaşi, Repubblica Socialista Romania. Attualmente Visiting Professor, Department of Computer Science, Sir George Williams University, Montreal 107, P. Q., Canada.

(3) The Author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta and to Sir George Williams University for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics and subsequently in the Department of Computer Science of these universities.

(4) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

sono stati presentati svariati modelli matematici dei fenomeni della Natura traducentisi nelle equazioni integro–differenziali ed additate numerose estensioni di tali modelli che dovevano essere cristallizzati poscia in una cospicua opera in collaborazione con Joseph Pérès di cui disgraziatamente, gli annunciati tomi successivi II e III non sono mai apparsi [6].

In ciò che segue gli Autori espongono, pur tenendo conto di una larga serie di lavori propri [7]–[8] come pure di contributi odierni nel dominio degli studi sulle equazioni integro–differenziali ove brilla tutt'ora la Scuola Kirghisa [9], il problema di valori iniziali concernente una nuova e a quel che pare assai importante estensione delle equazioni integro–differenziali [10] non lineari di Volterra.

2. Si consideri l'equazione integro–differenziale non lineare

$$y''(x) + py(x) = f\left[x , y(x) , \int_a^{\varphi[x,y(x)]} \mathcal{K}(x , t , y(t))\, dt\right] , \tag{1}$$

con le condizioni iniziali

$$y^{(i)}(a) = y_0^{(i)} \qquad (i = 0 , 1), \tag{2}$$

ove y_0 , y_0' , p , a sono numeri noti, $f(x , y , z)$, $\varphi(x , y)$ e $\mathcal{K}(x , t , y)$ sono funzioni note continue nei loro argomenti e lipschitziane rispetto ad y e z nel dominio $\mathfrak{D} = \{a \leq x , t \leq b , |y| \leq r_1 , |z| \leq r_2\}$, essendovi $z \equiv \int_a^{\varphi[x,y(x)]} \mathcal{K}[x , t , y(t)]\, dt$ e r_1 e r_2 numeri pur essi noti.

Ha luogo il

TEOREMA 1. – *L'equazione integrale non lineare*

$$y(x) = h(x) + \int_a^x \mathrm{H}(x , \tau) f\left[\tau , y(\tau) , \int_a^{\varphi[\tau,y(\tau)]} \mathcal{K}(\tau , t , y(t))\, dt\right] d\tau , \tag{3}$$

che si ottiene dal sistema (1), (2) *tramite l'applicazione del metodo della variazione delle costanti arbitrarie ed ove* $h(x)$ *è una funzione nota,* $\mathrm{H}(x , \tau)$ *è la funzione di Cauchy corrispondente al sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria di second'ordine*

$$y''(x) + py(x) = 0 , \tag{4}$$

è equivalente al sistema (1), (2) *nel senso che soluzioni di questo sono pure soluzioni dell'equazione* (3) *e reciprocamente.*

3. UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA (1), (2). Siano $y_1(x)$ e $y_2(x) \in \mathfrak{D}$ due soluzioni del problema considerato. Ponendo $\| u \| = \max_{[a,b]} | u(x)|$, si ha

$$\|y_2 - y_1\| \leq \left\| \int_a^x | \mathrm{H}(x,\tau)| \, [\mathfrak{L}_1(\tau) \, |y_2(\tau) - y_1(\tau)| + \mathfrak{L}_2(\tau) \, |\Phi(\tau, y_1, y_2, \varphi, a)|] \, \mathrm{d}\tau \right\| =$$

$$= \left\| \int_a^x | \mathrm{H}(x,\tau)| \left[\mathfrak{L}_1(\tau) \, |y_2(\tau) - y_1(\tau)| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathfrak{L}_2(\tau) \left| \left\{ \Psi(\tau, y_1, y_2, \varphi, a) + \int_{\varphi(\tau, y_1)}^{\varphi(\tau, y_2)} \mathcal{K}(\tau, t, y_1(t)) \, \mathrm{d}t \right\} \right| \right] \mathrm{d}\tau \right\| \leq$$

$$(5) \qquad \leq \left\| \int_a^x | \mathrm{H}(x,\tau)| \left[\mathfrak{L}_1(\tau) + \mathfrak{L}_2(\tau) \int_a^{\varphi(\tau, y_2)} \mathfrak{L}_3(\tau, t) \, \mathrm{d}t + \mathfrak{L}_2(\tau) \, \mathfrak{L}_4(\tau) \, \| \mathcal{K}(\tau, t, y_1(t)) \| \right] \mathrm{d}\tau \right\| \cdot$$

$$\cdot \, \|y_2 - y_1\| \equiv \alpha \cdot \|y_2 - y_1\| ,$$

$$\Phi(\tau, y_1, y_2, \varphi, a) \equiv \int_a^{\varphi(\tau, y_2)} \mathcal{K}(\tau, t, y_2(t)) \, \mathrm{d}t - \int_a^{\varphi(\tau, y_1)} \mathcal{K}(\tau, t, y_1(t)) \, \mathrm{d}t ,$$

$$\Psi(\tau, y_1, y_2, \varphi, a) \equiv \int_a^{\varphi(\tau, y_2)} [\mathcal{K}(\tau, t, y_2(t)) - \mathcal{K}(\tau, t, y_1(t))] \, \mathrm{d}t ,$$

ove $\mathfrak{L}_1(x)$ e $\mathfrak{L}_2(x)$ sono coefficienti di Lipschitz della funzione $f[\cdot]$ rispetto al secondo e terzo argomento, $\mathfrak{L}_3(x, t)$ è coefficiente di Lipschitz della funzione $\mathcal{K}[\cdot]$ rispetto al terzo argomento e $\mathfrak{L}_4(x)$ è il coefficiente di Lipschitz della funzione $\varphi(x, y)$ rispetto al secondo argomento nel dominio $\mathfrak{D}$. Trascriviamo l'equazione (3) sotto la forma

$$(6) \qquad y(x) = h(x) + \mathrm{A}y(x) .$$

Si ha il

TEOREMA 2. – *La condizione*

$$(7) \qquad \alpha < 1$$

assicura, nelle condizioni di più sopra, la compattezza delle rappresentazioni dell'operatore A *nel dominio* $\mathfrak{D}$ *e pertanto la realizzazione del principio di punto fisso di Banach ed il problema* (1), (2) *possiede nel dominio* $\mathfrak{D}$ *una soluzione unica due volte continuamente derivabile e tale soluzione può essere costruita tramite l'applicazione del metodo delle approssimazioni successive*

$$(8) \qquad y_n(x) = h(x) + \int_a^x \mathrm{H}(x,\tau) \, f\left[\tau, y_{n-1}(\tau), \int_a^{\varphi[\tau, y_{n-1}(\tau)]} \mathcal{K}(\tau, t, y_{n-1}(t)) \, \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\tau ,$$

$$n = 1, 2, \cdots .$$

La soluzione del problema considerato è data dalla

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x) . \tag{9}$$

4. ESISTENZA E STABILITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA (1), (2). Limitiamoci ad esaminare in ciò che segue la stabilità della soluzione del problema (1), (2) rispetto alle perturbazioni esercitantesi sulla funzione $\varphi(x, y)$. Denotando una tale perturbazione con $\beta(x, y)$, si ponga

$$\varphi(x, y) + \beta(x, y) = \chi(x, y) , \tag{10}$$

ove $|\beta(x, y)| < \varepsilon_1$, $(x, y) \in \mathfrak{D}$ ed $\varepsilon_1 = \text{const.}$ Vogliamo intendere la stabilità della soluzione del problema (1), (2) nel senso della *vicinanza* della soluzione del problema iniziale (1), (2) con quella del problema di valori iniziali concernente l'equazione integro-differenziale non lineare *perturbata*

$$z''(x) + pz(x) = f\left[x, z(x), \int_a^{\chi(\tau, z)} \mathcal{K}(\tau, t, z(t))\, dt\right] \tag{11}$$

e le condizioni (2). Dalle (2) e (11) si ottiene in seguito all'applicazione del metodo indicato al § 1

$$z(x) = h(x) + \int_a^x H(x, \tau) f\left[\tau, z(\tau), \int_a^{\chi(\tau, z)} \mathcal{K}(\tau, t, z(t))\, dt\right] d\tau . \tag{12}$$

Valutiamo ora la differenza $y(x) - z(x)$. Dalla (3) e (12) si ha

$$|y(x) - z(x)| \le \tag{13}$$

$$\le \int_a^x |H(x,\tau)| \left\{ \mathfrak{L}_1(\tau)\, |y(\tau) - z(\tau)| + \mathfrak{L}_2(\tau) \left| \int_a^{\varphi(t, y)} \mathcal{K}(\tau, t, y(t))\, dt - \int_a^{\psi(\tau, z)} \mathcal{K}(\tau, t, z(t))\, dt \right| \right\} d\tau \le$$

$$\le \|\beta(x, y)\, \mathcal{K}(\tau, t, y)\| \int_a^x |H(x, \tau)\, \mathfrak{L}_2(\tau)\, \mathfrak{L}_4(\tau)|\, d\tau + \int_a^x M(\tau)\, |y(\tau) - z(\tau)|\, d\tau \equiv$$

$$= \varepsilon_1' \cdot c + \int_a^x M(\tau)\, |y(\tau) - z(\tau)|\, d\tau ,$$

ove $M(y)$ è una funzione non negativa nota nell'intervallo $[a, b]$ e c è un numero positivo.

Facendo uso della diseguaglianza di Gronwall-Bellman [11] si ricava dalla (13)

$$|y(x) - z(x)| \le \varepsilon_1 \cdot c \cdot \exp \int_a^x M(\tau)\, d\tau , \qquad x \in [a, b]. \tag{14}$$

Donde il

TEOREMA 3. – *La soluzione del problema dei valori iniziali* (2) *concernente l'equazione integro-differenziale non lineare* (1) *è stabile nel senso indicato più sopra rispetto alla perturbazione della funzione* $\varphi(x, y)$ *data dalle* (10).

Osservazioni. – 1) È quasi superfluo sottolineare che i problemi dell'esistenza, dell'unicità e della stabilità della soluzione del sistema integro-differenziale non lineare (1), (2) possono essere trattati in svariati modi. Ad esempio, si possono ottenere risultati molto più precisi concernenti la vicinanza delle soluzioni del sistema non perturbato (1), (2) e del sistema perturbato (2), (11) se si prendono le mosse dalla diseguaglianza

$$|y(x) - z(x)| \leq \tag{15}$$

$$\leq \int_a^x |H(x,t)| \left\{ \mathfrak{L}_1(\tau) \, |y(\tau) - z(\tau)| + \mathfrak{L}_2(\tau) \int_a^{\varphi(\tau, z)} \mathfrak{L}_3(\tau, t) \, |y(t) - z(t)| \, dt + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{L}_2(\tau) \, \mathfrak{L}_4(\tau) \, \| \mathcal{K}(\tau, t, y) \| \, |\beta(\tau, y)| \right\} d\tau \equiv \sigma(x) + \int_a^x N(x,t) \, |y(t) - z(t)| \, dt.$$

Dalla (15) risulta senz'altro l'ineguaglianza

$$|y(x) - z(x)| \leq \sigma(x) + \int_a^x \sum_{i=1}^{\infty} N_i(x, t) \, \sigma(t) \, dt, \tag{16}$$

ove $N_i(x, t)$ è l' i-mo nucleo iterato del nucleo $N(x, t)$. L'ineguaglianza (16) permette di enunciare il seguente

TEOREMA 4. – *Vi è una stretta corrispondenza tra l'ordine di piccolezza delle perturbazioni* $\beta(x, y)$ *e quello della deviazione* $y(x) - z(x)$, $x \in [a, b]$.

2) In una delle Note susseguenti dei medesimi Autori saranno esposti altri problemi concernenti queste nuove estensioni delle equazioni integro-differenziali non lineari di Volterra, mentre lo studio di alcuni problemi concreti rispecchianti tali sistemi seguito dalle programmazioni alle calcolatrici elettroniche sarà esposto nel « Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași ».

BIBLIOGRAFIA

[1] VITO VOLTERRA, *Opere matematiche di Vito Volterra*. Volumi I–V, 1954–1957, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei.

[2] MAURO PICONE, *Presentazione della ristampa, in una edizione Dover, della traduzione inglese delle conferenze tenute da Vito Volterra, nel 1925, all'Università di Madrid*, « Atti Accad. Nazionale dei Lincei. Rend. Cl. sc. fis., mat. e nat. », ser. VIII, *1*, 127 (1960).

[3] D. MANGERON, *Visita la Iași a ilustrului matematician italian Vito Volterra*, « Revista științifica 'V. Adamachi' », Iași, 1928.

[4] V. VOLTERRA, *Una teoria matematica sulla lotta per l'esistenza*, « Scientia », *41*, 84–102 (1927).

[5] V. VOLTERRA, *Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires*, « J. de Math. pures et appl. », sér. 9, 7 249–298 (1928).

[6] V. VOLTERRA e J. PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionnelles*. Tomo I: *Généralités sur les fonctionnelles. Théorie des équations intégrales*. Paris, Gauthier-Villars, 1936, XII–359. [Contenuto degli enunciati tomi successivi mai più apparsi: II: *Compositions. Equations intégro-différentielles et aux dérivées fonctionnelles. Généralisations des fonctions analytiques*; III: *Compléments et applications*].

[7] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEIN, *Problemi concernenti varie equazioni integro-differenziali non lineari con derivate totali di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *33*, 226–266 (1963); *34*, 344–368 (1964); *35*, 341–364 (1965).

[8] L. E. KRIVOSHEIN, D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Systèmes mathématiques aux structures entremêlées. Problèmes « bien posés » concernant certaines équations intégro-différentielles non linéaires contenant l'autorèglage sous forme d'une intégrale*. A M. MAURO PICONE dans le 45$^{\text{ème}}$ anniversaire de l'Institut pour l'Application du Calcul (l'INAC, Rome), créé et dirigé par Lui depuis sa fondation, « Bull. Acad. R. Sci. Belgique », sér. 5, *58*, 6 p. (1972).

[9] * * * *Issledovania po integro-differentsial'nym uravneniam*. Volumi I–VI, 1937–1970, « Akad. Nauk Kirg. S.S.R. », Frunze.

[10] A. CORDUNEANU, *Sur l'existence et la stabilité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra*, « Bull. Polytechn. Inst. Jassy », *18* (XXII), fasc. 1–2, Section I, « Math. Méc., Phys. », pp. 87–93 (1972). Vedansi pure altri recentissimi lavori sull'argomento elaborati nel quadro della Scuola di Analisi Matematica di Iași.

[11] EDWIN F. BECKENBACH and RICHARD BELLMAN, *Inequalities*. 2d rev. print, Berlin, Springer-Verlag, 198 p. (1965).