Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tino Zeuli

Su alcune classi di soluzioni delle equazioni della magnetogasdinamica non stazionaria e isoentropica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.1, p. 89–100.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_1_89_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Magnetogasdinamica. — *Su alcune classi di soluzioni delle equazioni della magnetogasdinamica non stazionaria e isoentropica* (*). Nota di TINO ZEULI, presentata (**) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we study the non-steady isoentropic magneto-gasdynamics equations, when the involved quantities are each one a product of a function only of time by a function only of the coordinates. The solution of problem is reduced to the second order ordinary differential equation. Besides we examine a few remarkable cases.

1. In un fascicolo dell'« International Journal of Engineering Science » (1), J. G. Kingston e C. Rogers hanno pubblicato una Nota dal titolo « *A class of polytropic flows in plane non-steady magneto-gasdynamics* », considerando soluzioni in cui le componenti della velocità, quelle del campo magnetico, la densità e la pressione sono espresse, ciascuna, dal prodotto di una funzione soltanto del tempo per una funzione delle sole coordinate del punto, applicando il metodo delle funzioni di variabile complessa. Per questo gli Autori ammettono a priori che il moto sia irrotazionale e che inoltre il fattore di densità indipendente dal tempo sia costante. Ma queste ipotesi sono, in generale, molto restrittive e rendono incompatibile il sistema formato dalle equazioni del moto, di continuità, del campo magnetico, dall'equazione di stato e da quella che esprime la costanza dell'entropia di una data particella di gas durante il moto, che si traduce nell'annullarsi della *derivata sostanziale* rispetto al tempo dell'entropia specifica.

In ogni modo gli stessi Autori assegnano delle soluzioni particolari in cui le due componenti della velocità sono funzioni lineari delle coordinate e la pressione è una funzione quadratica delle medesime. Esse ovviamente non hanno alcun interesse fisico, inquantoché quelle quantità in valore assoluto crescono indefinitamente nell'allontanarsi dall'origine. Inoltre la densità in ogni punto tende ad annullarsi dovunque col crescere del tempo.

In questa Nota ho ripreso la questione considerando il moto dal punto di vista spaziale, supponendo ancora che la velocità, il campo magnetico, la densità e la pressione siano esprimibili mediante il prodotto di una funzione del tempo per una funzione delle coordinate. Ho dimostrato allora che l'entropia specifica deve essere necessariamente espressa dalla somma di una funzione del tempo e di una funzione del punto. Ho analizzato quindi il caso piano in cui tutti gli elementi del moto e del campo magnetico dipendano da una sola coordinata (da x), poi il caso di un riferimento a coordinate cilindriche, in cui gli stessi elementi dipendano solo dalla distanza r dall'asse;

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1972.

(1) « Int. J. Engng Sci. », 9, pp. 17–24.

infine il caso di un riferimento a coordinate polari sferiche, in cui le incognite sono funzioni della sola distanza dall'origine. In ciascuno di questi casi ho dimostrato che la risoluzione del problema si riduce alla risoluzione di un'equazione differenziale del 2° ordine in una sola incognita, equazione che, per quanto complicata è sempre suscettibile di integrazione numerica.

Nel caso piano, poi, per valori particolari di alcune costanti arbitrarie, ho assegnato di quella equazione un integrale primo, che semplifica notevolmente la questione.

2. Le equazioni da considerare sono:

l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 , \tag{1}$$

dove ρ è la densità e $\boldsymbol{v}$ la velocità delle particelle di fluido;

l'equazione del campo magnetico $\boldsymbol{H}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}) = 0 , \tag{2}$$

con la condizione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 , \tag{3}$$

che è conseguenza della (2);

l'equazione del moto

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}P}\,\boldsymbol{v}\right) + \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} = 0 , \tag{4}$$

dove p è la pressione del gas e μ la permeabilità magnetica (costante);

l'equazione di stato

$$\rho = k p^{1/\gamma} \mathrm{e}^{-s/c_p} , \tag{5}$$

dove s è l'entropia specifica, γ è la costante politropica ($\gamma > 1$), c_p il calore specifico a pressione costante, mentre k è generalmente una funzione del tempo.

Supposto, infine, che il gas sia isoentropico, che cioè l'entropia si mantenga costante per ogni particella di gas per tutto il suo movimento, ma vari da particella a particella, sarà nulla la sua derivata sostanziale rispetto al tempo, cioè

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{grad} s \times \boldsymbol{v} = 0 . \tag{6}$$

Osserviamo che, nel caso generale, le incognite del problema sono: la densità ρ, la pressione p, l'entropia s, le tre componenti, v_x , v_y , v_z, della velocità e le tre componenti H_x, H_y, H_z, del campo magnetico, cioè in totale nove, e per la loro determinazione sussistono le tre equazioni scalari (1), (5), (6) e le due equazioni vettoriali (2) e (4) che nel complesso costituiscono un sistema di nove equazioni scalari nelle dette incognite.

3. Supponiamo ora che i vettori velocità, $\boldsymbol{v}$, e campo magnetico, $\boldsymbol{H}$, e le quantità scalari siano il prodotto di una funzione del tempo e di una funzione del punto, poniamo cioè

$$(7) \qquad \boldsymbol{v} = f_1(t)\, \boldsymbol{v}^* \quad , \quad \rho = f_2(t)\, \rho^* \quad , \quad p = f_3(t)\, p^* \quad , \quad \boldsymbol{H} = f_4(t)\, \boldsymbol{H}^*,$$

dove $\boldsymbol{v}^*$, $\boldsymbol{H}^*$, ρ^*, p^* sono funzioni soltanto del punto.

Sostituendo le (7) nelle (1), (2) e (4), abbiamo dalla (1)

$$\dot{f}_2(t)\, \rho^* + f_1 f_2 \operatorname{div}(\rho^* \boldsymbol{v}^*) = 0 :$$

occorre pertanto che sia

$$(8) \qquad \dot{f}_2 = \alpha_2 f_1 f_2 ,$$

con α_2 costante e

$$(9) \qquad \alpha_2\, \rho^* + \operatorname{div}(\rho^* \boldsymbol{v}^*) = 0 .$$

Analogamente la (2) porge

$$(10) \qquad \dot{f}_4 = \alpha_1 f_1 f_4 ,$$

$$(11) \qquad \alpha_1 \boldsymbol{H}^* + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{v}^*) = 0 ,$$

con α_1 altra costante.

La condizione (3) diventa

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}^* = 0 .$$

Infine, l'equazione del moto (4), dopo aver diviso ambo i membri per $f_2 f_1^2$, dà

$$(12) \qquad \rho^*\left(\frac{\dot{f}_1}{f_1^2}\, \boldsymbol{v}^* + \frac{d\boldsymbol{v}^*}{dP}\, \boldsymbol{v}^*\right) + \frac{f_3}{f_1^2 f_2} \operatorname{grad} p^* - \mu\, \frac{f_4^2}{f_1^2 f_2} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{H}^* = 0 .$$

Questa equazione si può soddisfare ponendo i coefficienti dipendenti dal tempo uguali a delle costanti, cioè

$$(13) \qquad \frac{\dot{f}_1}{f_1^2} = -\frac{\lambda}{\delta} \quad , \quad \frac{f_3}{f_1^2 f_2} = \frac{\alpha_4}{\delta^2} \quad , \quad \frac{f_4^2}{f_1^2 f_2} = \frac{\alpha_3}{\delta^2} .$$

Dalla prima delle (13) si ottiene

$$(14) \qquad f_1 = \delta (\lambda t + \nu)^{-1},$$

con ν altra costante.

Dopo ciò dalla (8) e dalle 2ª e 3ª delle (13) si ricava

$$(15)\qquad f_2 = (\lambda t + \nu)^{\alpha_2 \delta/\lambda} \quad , \quad f_3 = \alpha_4 (\lambda t + \nu)^{-2+\alpha_2 \delta/\lambda} \quad , \quad f_4 = \alpha_3 (\lambda t + \nu)^{-1+\alpha_2 \delta/(2\lambda)} .$$

D'altra parte dalla (10) si ha

$$(15')\qquad f_4 = \alpha_3 (\lambda t + \nu)^{\alpha_1 \delta/\lambda}$$

perciò dovrà essere

$$(16)\qquad \frac{\alpha_1 \delta}{\lambda} = -1 + \frac{\alpha_2 \delta}{2\lambda}, \quad \text{da cui} \quad \delta = 2\lambda(\alpha_2 - 2\alpha_1)^{-1}, \quad \text{con} \quad \alpha_2 \neq 2\alpha_1 .$$

L'equazione (12) del moto si riduce allora alla seguente

$$(17)\qquad \delta\rho^* \left(-\lambda \boldsymbol{v}^* + \delta \frac{d\boldsymbol{v}^*}{dP} \boldsymbol{v}^*\right) + \alpha_4 \operatorname{grad} p^* - \mu\alpha_3^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{H}^* = 0 ,$$

nella quale non figura più il tempo.

Per quanto riguarda l'equazione di stato (5), prendendo i logaritmi di ambo i membri, si ha

$$(18)\qquad \frac{s}{c_p} = \log \frac{k f_3^{1/\gamma}}{f_2} + \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} .$$

Questa mostra che l'entropia specifica, s, sarà la somma di una funzione della sola t e di una funzione del punto soltanto.

Sostituendo nella (6) abbiamo

$$\frac{d}{dt} \log \frac{k f_3^{1/\gamma}}{f_2} + f_1 \operatorname{grad} \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} \times \boldsymbol{v}^* = 0 ;$$

Dovrà essere quindi

$$\frac{d}{dt} \log \frac{k f_3^{1/\gamma}}{f_2} = \frac{s_1}{c_p} f_1 ,$$

con s_1 costante. Ne segue

$$\log \frac{k f_3^{1/\gamma}}{f_2} = \frac{s_0}{c_p} + \frac{s_1}{c_p} \int f_1(t)\, dt ,$$

con s_0 altra costante, e quindi

$$(19)\qquad s = s_0 + s_1 \int f_1(t)\, dt + c_p \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} =$$

$$= s_0 + \log (\lambda t + \nu)^{s_1 \delta/\lambda} + c_p \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} ,$$

$$(20)\qquad k = \frac{f_2}{f_3^{1/\gamma}} e^{s_0/c_p} (\lambda t + \nu)^{s_1 \delta/(\lambda c_p)} = \alpha_4^{-1/\gamma} e^{s_0/c_p} (\lambda t + \nu)^{\varepsilon} ,$$

$$\text{con} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha_2 + \frac{s_1}{c_p} \right) + \frac{2}{\gamma} ,$$

$$\frac{s_1}{c_p} + \operatorname{grad} \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} \times \boldsymbol{v}^* = 0 . \tag{21}$$

La questione è dunque ridotta a determinare le quantità ρ^*, p^*, $\boldsymbol{v}^*$, $\boldsymbol{H}^*$ mediante le equazioni

$$\alpha_2 \rho^* + \operatorname{div} (\rho^* \boldsymbol{v}^*) = 0 , \tag{9}$$

$$\alpha_1 \boldsymbol{H}^* + \operatorname{rot} (\boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{v}^*) = 0 \quad , \quad (\operatorname{div} \boldsymbol{H}^* = 0) , \tag{11}$$

$$\delta\rho^* \left(-\lambda \boldsymbol{v}^* + \delta \frac{d\boldsymbol{v}^*}{dP} \boldsymbol{v}^*\right) + \alpha_4 \operatorname{grad} p^* - \mu\alpha_3^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{H}^* = 0 , \tag{17}$$

$$\frac{s_1}{c_p} + \operatorname{grad} \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} \times \boldsymbol{v}^* = 0 . \tag{21}$$

4. Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, x , y , z, indicando con v_x , v_y , v_z le componenti del vettore $\boldsymbol{v}^*$ e con H_x , H_y , H_z quelle del vettore $\boldsymbol{H}^*$, le equazioni precedenti equivalgono al seguente sistema di equazioni scalari

$$\alpha_2 \rho^* + \frac{\partial}{\partial x} (\rho^* v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho^* v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho^* v_z) = 0 , \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_1 H_x + \frac{\partial}{\partial y} (H_x v_y - H_y v_x) - \frac{\partial}{\partial z} (H_z v_x - H_x v_z) = 0 , \\ &\alpha_1 H_y + \frac{\partial}{\partial z} (H_y v_z - H_z v_y) - \frac{\partial}{\partial x} (H_x v_y - H_y v_x) = 0 , \\ &\alpha_1 H_z + \frac{\partial}{\partial x} (H_z v_x - H_x v_z) - \frac{\partial}{\partial y} (H_y v_z - H_z v_y) = 0 , \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\delta\rho^* \left\{-\lambda v_x + \delta \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right\} + \alpha_4 \frac{\partial p^*}{\partial x} - \\ &\qquad - \mu\alpha_3^2 \left\{H_z \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - H_y \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\right\} = 0 , \\ &\delta\rho^* \left\{-\lambda v_y + \delta \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right\} + \alpha_4 \frac{\partial p^*}{\partial y} - \\ &\qquad - \mu\alpha_3^2 \left\{H_x \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) - H_z \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\right\} = 0 , \\ &\delta\rho^* \left\{-\lambda v_z + \delta \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right\} + \alpha_4 \frac{\partial p^*}{\partial z} - \\ &\qquad - \mu\alpha_3^2 \left\{H_y \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - H_x \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\right\} = 0 , \end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$\frac{s_1}{c_p} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} = 0 . \tag{25}$$

5. Consideriamo il caso del moto piano in cui $v_z = 0$ e tutte le quantità sono funzioni soltanto della coordinata x.

In questo caso la prima delle (23) richiede che sia $H_x = 0$, ed il sistema precedente si riduce al seguente:

$$\alpha_2 \rho^* + \frac{d}{dx}(\rho^* v_x) = 0\,, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_1 H_y + \frac{d}{dx}(H_y v_x) = 0\,,\\ &\alpha_1 H_z + \frac{d}{dx}(H_z v_x) = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\delta\rho^*\left(-\lambda v_x + \delta v_x \frac{dv_x}{dx}\right) + \alpha_4 \frac{dp^*}{dx} + \frac{1}{2}\mu\alpha_3^2 \frac{d}{dx}(H_y^2 + H_z^2) = 0\,,\\ &\delta\rho^*\left(-\lambda v_y + \delta v_x \frac{dv_y}{dx}\right) = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$\frac{s_1}{c_p} + v_x \frac{d}{dx} \log \frac{p^{*\,1/\gamma}}{\rho^*} = 0\,. \tag{29}$$

La risoluzione di questo sistema si può ridurre alla determinazione di una sola incognita, la v_x, mediante una sola equazione. Invero, dalla (26), dividendo ambo i membri per $\rho^* v_x$, si ricava facilmente

$$\rho^* = \frac{A_0}{v_x}\, e^{-\alpha_2 \int \frac{dx}{v_x}}\,, \tag{30}$$

con A_0 costante arbitraria. Dalla (29) si ottiene quindi

$$\log \frac{p^{*\,1/\gamma}}{\rho^*} = -\frac{s_1}{c_p}\int \frac{dx}{v_x} + \log B_0\,;$$

con B_0 costante arbitraria, e quindi

$$p^* = \frac{A_0^\gamma B_0^\gamma}{v_x^\gamma}\, e^{-\gamma\left(\frac{s_1}{c_p} + \alpha_2\right)\int \frac{dx}{v_x}}\,. \tag{31}$$

La 1ª delle (27), che è analoga alla (26), porge

$$H_y = \frac{C_0}{v_x}\, e^{-\alpha_1 \int \frac{dx}{v_x}}\,, \tag{32}$$

con C_0 costante arbitraria. La componente H_z del campo magnetico soddisfa alla stessa equazione cui soddisfa la componente H_y; queste due componenti differiscono quindi per un fattore costante arbitrario β:

$$H_z = \beta H_y\,.$$

La seconda delle (28), essendo $\rho^* \neq 0$, dà

$$v_y = \Gamma_0\, e^{\frac{\lambda}{\delta}\int \frac{dx}{v_x}}\,, \tag{33}$$

e se la costante Γ_0 non è nulla sarà $v_y \neq 0$; il moto sarà vorticoso ed il vortice sarà dato da

$$\omega = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_z = \frac{1}{2} f_1(t) \frac{dv_y}{dx} = \frac{1}{2} f_1 \frac{\lambda}{\delta} \frac{\Gamma_0}{v_x} e^{\frac{\lambda}{\delta}\int \frac{dx}{v_x}} = \frac{1}{2} f_1 \frac{\lambda}{\delta} \frac{v_y}{v_x}.$$

6. Osserviamo ora che, ponendo

$$u = e^{\int \frac{dx}{v_x}}, \qquad \text{e quindi} \quad v_x = u \Big/ \frac{du}{dx}, \tag{34}$$

dalla (30) risulta

$$\rho^* v_x = A_0 u^{-\alpha_2}$$

e quindi

$$\rho^* v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{A_0}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2} \left[u^{-\alpha_2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - u^{-\alpha_2+1} \frac{d^2u}{dx^2}\right]. \tag{35}$$

Dalla (31), poi segue

$$p^* = A_0^\gamma B_0^\gamma u^{-\gamma\alpha_5}\left(\frac{du}{dx}\right)^\gamma, \qquad \text{con} \quad \alpha_5 = \frac{s_1}{c_p} + \alpha_2 + 1, \tag{36}$$

per cui

$$\frac{dp^*}{dx} = -A_0^\gamma B_0^\gamma \gamma\alpha_5 u^{-\gamma\alpha_5-1}\left(\frac{du}{dx}\right)^{\gamma+1} + \gamma A_0^\gamma B_0^\gamma u^{-\gamma\alpha_5}\left(\frac{du}{dx}\right)^{\gamma-1} \frac{d^2u}{dx^2}. \tag{37}$$

Infine dalla (32) si ha

$$H_y = C_0 u^{-\alpha_1-1} \frac{du}{dx}$$

e quindi

$$H_y^2 + H_z^2 = C_0^2(1+\beta^2) u^{-2\alpha_1-2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \tag{38}$$

da cui

$$\frac{d}{dx}(H_y^2 + H_z^2) = C_0^2(1+\beta^2) \cdot \left[-2(\alpha_1+1) u^{-2\alpha_1-3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 2u^{-2\alpha_1-2} \frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2}\right]. \tag{39}$$

Servendoci ora delle (34), (35), (37) e (39), la 1ª delle (28), moltiplicandone ambo i membri per $\left(\frac{du}{dx}\right)^2$, porge

$$\left[\alpha_3^2(1+\beta^2)\mu C_0^2 u^{-2\alpha_1-2}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + \alpha_4 \gamma A_0^\gamma B_0^\gamma u^{-\gamma\alpha_5}\left(\frac{du}{dx}\right)^{\gamma+1} - \delta^2 A_0 u^{-\alpha_2+1}\right] \frac{d^2u}{dx^2} - \alpha_4 \alpha_5 \gamma A_0^\gamma B_0^\gamma u^{-\gamma\alpha_5-1}\left(\frac{du}{dx}\right)^{\gamma+3} - (\alpha_1+1)\alpha_3^2(1+\beta^2)\mu C_0^2 u^{-2\alpha_1-3}\left(\frac{du}{dx}\right)^5 + \left(1-\frac{\lambda}{\delta}\right)\delta^2 A_0 u^{-\alpha_2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 0, \tag{40}$$

che è un'equazione differenziale del 2° ordine, alquanto complicata, nella $u(x)$; quando siano fissati i valori delle costanti arbitrarie che vi compaiono, in base ad assegnate condizioni può essere suscettibile di integrazione numerica e fornire la $u(x)$, determinata la quale si ha subito, colla (34) la componente v_x della velocità e quindi gli altri elementi incogniti del moto e del campo magnetico.

7. Possiamo anche osservare che, sempre dalla (30), risultano

$$\rho^* = -\frac{A_0}{\alpha_2}\frac{d}{dx} e^{-\alpha_2 \int \frac{dx}{v_x}} , \qquad \text{e} \quad \rho^* v_x = A_0 \, e^{-\alpha_2 \int \frac{dx}{v_x}} \tag{41}$$

e quindi

$$-\lambda\rho^* v_x \,\delta\rho^* v_x \frac{dv_x}{dx} = A_0\left(\frac{\lambda}{\alpha_2} v_x \frac{d}{dx} e^{-\alpha_2 \int \frac{dx}{v_x}} + \delta \frac{dv_x}{dx} e^{-\alpha_2 \int \frac{dx}{v_x}}\right);$$

allora se si sceglie la costante δ tale che [cfr. (16)]

$$\delta = \frac{\lambda}{\alpha_2} , \qquad (\alpha_2 = -2\,\alpha_1) , \tag{42}$$

si ha

$$\rho^*\left(-\lambda v_x + \delta v_x \frac{dv_x}{dx}\right) = \delta A_0 \frac{d}{dx}\left(v_x \, e^{-\alpha_2 \int \frac{dx}{v_x}}\right) \tag{43}$$

e la 1ª delle (28), in questo caso, porge l'integrale primo

$$\delta^2 A_0 v_x \, e^{-\alpha_2 \int \frac{dx}{v_x}} + \alpha_4 p^* + \frac{1}{2}\mu\alpha_3^2 (H_y^2 + H_z^2) = E_0 \qquad (= \text{costante}) . \tag{44}$$

Servendosi della funzione $u(x)$ introdotta nel n. prec., delle (34), (36) e (38) e moltiplicandone ambo i membri per du/dx, dalla (44) si ottiene per la $u(x)$ l'equazione differenziale del 1° ordine:

$$\frac{1}{2}\alpha_3^2(1+\beta^2)\,\mu C_0^2 u^{-2\alpha_1-2}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + \alpha_4 A_0^\gamma B_0^\gamma u^{-\gamma\alpha_5}\left(\frac{du}{dx}\right)^{\gamma+1} - \\ - E_0 \frac{du}{dx} + \delta^2 A_0 u^{1-\alpha_2} = 0 , \tag{45}$$

nella quale va posto $\alpha_2 = -2\,\alpha_1$ e ricordato il valore di α_5 [v. (36)].

8. In un riferimento a coordinate cilindriche r, θ, z, $(r = \sqrt{x^2+y^2})$, indicando con v_r, v_θ, v_z, le componenti cilindriche del vettore v^* e con H_r, H_θ, H_z quelle del vettore $\boldsymbol{H}^*$, le equazioni (9), (11), (17) e (21) danno luogo al seguente sistema di equazioni scalari

$$\alpha_2 \rho^* + \frac{\partial(\rho^* v_r)}{\partial r} + \frac{\rho^* v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho^* v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho^* v_z) = 0 , \tag{46}$$

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1 H_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_r v_\theta - H_\theta v_r) - \frac{\partial}{\partial z}(H_z v_r - H_r v_z) = 0\,, \\ &\alpha_1 H_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(H_\theta v_z - H_z v_\theta) - \frac{\partial}{\partial r}(H_r v_\theta - H_\theta v_r) = 0\,, \\ &\alpha_1 H_z + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(H_z v_r - H_r v_z)] - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\theta v_z - H_z v_\theta) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\rho^*\left\{-\lambda v_r + \delta\left[v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\left(\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - v_\theta\right) + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right]\right\} + \alpha_4\frac{\partial p^*}{\partial r} - \\ &\qquad - \mu\alpha_3^2\left\{H_z\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) - H_\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\right\} = 0\,, \\ &\delta\rho^*\left\{-\lambda v_\theta + \delta\left[v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_r\right) + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]\right\} + \alpha_4\frac{1}{r}\frac{\partial p^*}{\partial\theta} - \\ &\qquad - \mu\alpha_3^2\left\{H_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right] - H_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right)\right\} = 0\,, \\ &\delta\rho^*\left\{-\lambda v_z + \delta\left[v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] + \alpha_4\frac{\partial p^*}{\partial z} - \right. \\ &\qquad - \mu\alpha_3^2\left\{H_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right) - H_r\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\right\} = 0\,, \end{aligned}\right.$$

$$(49)\quad \frac{s_1}{c_p} + v_r\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} = 0\,.$$

Nel caso del moto piano ($v_z = 0$), e nell'ipotesi che tutte le incognite dipendano soltanto dalla distanza r dall'origine $\left(\frac{\partial}{\partial\theta} = 0\,,\ \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$, la 1ª delle (47) richiede intanto che sia

$$H_r = 0\,.$$

Le rimanenti equazioni del sistema (46), (47), (48), e (49) si riducono alle seguenti

$$(50)\quad \alpha_2\rho^* + \frac{d}{dr}(\rho^* v_r) + \frac{\rho^* v_r}{r} = 0\,,$$

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1 H_\theta + \frac{d}{dr}(H_\theta v_r) = 0\,, \\ &\alpha_1 H_z + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_z v_r) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\rho^*\left\{-\lambda v_r + \delta\left(v_r\frac{dv_r}{dr} - \frac{1}{r}v_\theta^2\right)\right\} + \alpha_4\frac{dp^*}{dr} + \\ &\qquad + \mu\alpha_3^2\left\{H_z\frac{dH_z}{dr} + \frac{H_\theta}{r}\frac{d}{dr}(rH_\theta)\right\} = 0\,, \\ &\delta\rho^*\left\{-\lambda v_\theta + \delta\left(v_r\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta v_r}{r}\right)\right\} = 0\,, \end{aligned}\right.$$

$$(53)\quad \frac{s_1}{c_p} + v_r\frac{d}{dr}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*} = 0\,.$$

In modo analogo al caso precedente (n. 5), le equazioni (50) e (51), la 2ª delle (52) e la (53) pongono:

$$
(54)\qquad \begin{cases}
\rho^* = \dfrac{A_1}{r v_r}\, e^{-\alpha_2 \int \frac{dr}{v_r}} \\[2ex]
p^* = \dfrac{A_1^\gamma B_1^\gamma}{r^\gamma v_r^\gamma}\, e^{-\gamma\left(\frac{s_1}{c_p}+\alpha_2\right)\int \frac{dr}{v_r}} \\[2ex]
v_\theta = \dfrac{\Gamma_1}{r}\, e^{\frac{\lambda}{\delta}\int \frac{dr}{v_r}}\,, \\[2ex]
H_\theta = \dfrac{C_1}{v_r}\, e^{-\alpha_1 \int \frac{dr}{v_r}}\,, \\[2ex]
H_z = \dfrac{C_1'}{r v_r}\, e^{-\alpha_1 \int \frac{dr}{v_r}}\,,
\end{cases}
$$

con A_1, B_1, Γ_1, C_1, C_1', costanti arbitrarie.

Sostituendo nella 1ª delle (44) si ha un'equazione nella sola incognita v_r della variabile r. Nel caso considerato il vortice è dato da

$$
\omega = \frac{1}{2}(\text{rot}\, \boldsymbol{v})_z = \frac{1}{2} f_1 (\text{rot}\, \boldsymbol{v}^*)_z = \frac{1}{2r} f_1 \frac{d}{dr}(r v_\theta)
$$

9. Consideriamo infine il caso in cui il campo è riferito ad un sistema di coordinate polari sferiche r, θ, φ, $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$. In questo caso indicate con v_r, v_θ, v_φ, le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ e con H_r, H_θ, H_φ, quelle del vettore $\boldsymbol{H}$, le equazioni (9), (11), (17) e (21) forniscono il seguente sistema di equazioni scalari:

$$
(55)\qquad \alpha_2 \rho^* + \frac{\partial}{\partial r}(\rho^* v_r) + \frac{2}{r}\rho^* v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho^* v_\theta) + \\
+ \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\rho^* v_\theta + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^* v_\varphi) = 0\,,
$$

$$
(56)\qquad \begin{cases}
\alpha_1 H_r + \dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}[\operatorname{sen}\theta(H_r v_\theta - H_\theta v_r)] - \\
\qquad\qquad - \dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(H_\varphi v_r - H_r v_\varphi) = 0\,, \\[2ex]
\alpha_1 H_\theta + \dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(H_\theta v_\varphi - H_\varphi v_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}[r(H_r v_\theta - H_\theta v_r)] = 0\,, \\[2ex]
\alpha_1 H_\varphi + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}[r(H_\varphi v_r - H_r v_\varphi)] - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(H_\theta v_\varphi - H_\varphi v_\theta) = 0\,,
\end{cases}
$$

$$
(57)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\delta\rho^*\left\{-\lambda v_r+\delta\left[v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-v_\theta\right)+\frac{v_\varphi}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-v_\varphi\right)\right]\right\}+\\
&\quad+\alpha_4\frac{\partial p^*}{\partial r}-\mu\alpha_3^2\left\{H_\varphi\left[\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]-\right.\\
&\quad\left.-H_\theta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\right\}=0\,,\\
&\delta\rho^*\left\{-\lambda v_\theta+\delta\left[v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)+\frac{v_\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\cos\theta\, v_\varphi\right)\right]\right\}+\\
&\quad+\alpha_4\frac{1}{r}\frac{\partial p^*}{\partial\theta}-\mu\alpha_3^2\left\{H_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]-\right.\\
&\quad\left.-\frac{H_\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, H_\varphi)-\frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right]\right\}=0\,,\\
&\delta\rho^*\left\{-\lambda v_\varphi+\delta\left[v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+v_r\operatorname{sen}\theta+v_\theta\cos\theta\right)\right]\right\}+\\
&\quad+\frac{\alpha_4}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial p^*}{\partial\varphi}-\mu\alpha_3^2\left\{\frac{H_\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\, H_\varphi)-\frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right]-\right.\\
&\quad\left.-H_r\left[\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\right\}=0\,,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(58)\qquad \frac{s_1}{c_p}+v_r\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*}+\frac{v_\varphi}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*}=0\,.
$$

Se supponiamo che tutte le incognite siano funzioni soltanto del raggio r, la prima delle (56) mostra intanto che deve essere

$$H_r=0\,;$$

la (55) richiede che sia $v_\theta=0$ e la 2ª e la 3ª delle (57) che siano $v_\varphi=0$, $H_\varphi H_\theta=0$: supporremo $H_\varphi=0$ (2). Le rimanenti equazioni si riducono alle seguenti:

$$
(59)\qquad \alpha_2\rho^*+\frac{d}{dr}(\rho^* v_r)+\frac{2}{r}\rho^* v_r=0\,,
$$

$$
(60)\qquad \alpha_1 H_\theta+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_\theta v_r)=0\,,
$$

$$
(61)\qquad \delta\rho^*\left(-\lambda v_r+\delta v_r\frac{dv_r}{dr}\right)+\alpha_4\frac{dp^*}{dr}+\mu\alpha_3^2\frac{H_\theta}{r}\frac{d}{dr}(rH_\theta)=0\,,
$$

$$
(62)\qquad \frac{s_1}{c_p}+v_r\frac{d}{dr}\log\frac{p^{*1/\gamma}}{\rho^*}=0\,.
$$

(2) Se si supponesse nulla H_θ i risultati sarebbero gli stessi, salvo che si avrebbe per H_φ l'espressione che si ottiene per H_θ.

Le equazioni (59), (62) e (60) porgono

$$\rho^* = \frac{A_2}{r^2 v_r} e^{-\alpha_2 \int \frac{dr}{v_r}}, \tag{63}$$

$$p^* = \frac{A_2^\gamma B_2^\gamma}{(r^2 v_r)^\gamma} e^{-\gamma \left(\frac{s_1}{c_p} + \alpha_2\right) \int \frac{dr}{v_r}}, \tag{64}$$

$$H_\theta = \frac{C_2}{r v_r} e^{-\alpha_1 \int \frac{dr}{v_r}}, \tag{65}$$

dove A_2, B_2, C_2 sono costanti arbitrarie.

Sostituendo questi valori nella (61) si ha un'equazione in cui è incognita l'unica componente v_r del vettore $\boldsymbol{v}$.

In quest'ultimo caso il moto è puramente radiale ed il vortice è ovviamente nullo.