
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARLO VENINI

Comportamento quantistico di un corpuscolo materiale nell'universo di De Sitter della Relatività generale

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.1, p. 82-88.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_1_82_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica razionale. — *Comportamento quantistico di un corpuscolo materiale nell'universo di De Sitter della Relatività generale* (*).

Nota di CARLO VENINI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — Within the terms of quantum Mechanics we study the behaviour of a particle in De Sitter's spherical world of general Relativity.

In un riferimento inerziale dello spazio-tempo pseudoeuclideo della Relatività ristretta lo stato quantico di una particella materiale libera è fornito dall'equazione differenziale di Klein-Gordon [1]. In questa equazione alle derivate parziali è presente come incognita la funzione di stato ψ , della quale è ben noto il significato fisico: il prodotto $\psi\psi^*$, con ψ^* complessa coniugata di ψ , rappresenta la misura della densità di probabilità che possiede il corpuscolo di occupare, in un determinato istante, una assegnata posizione. La menzionata equazione può essere facilmente posta in forma tensoriale; sotto tale forma può ritenersi allora valida in un generico sistema di riferimento.

Poiché in essa, oltre allo scalare ψ , intervengono solo le sue derivate tensoriali seconde, le quali però notoriamente godono della commutabilità anche se la varietà è riemanniana, mi sembra lecito ritenere che l'equazione tensoriale di Klein-Gordon valga anche in Relatività generale, al fine di caratterizzare il comportamento quantistico di una particella materiale, priva di carica elettrica e soggetta quindi unicamente ad un campo gravitazionale. È appunto nello spirito della Relatività generale il considerare come libero un corpuscolo sul quale agiscono solo azioni gravitazionali.

In questa Nota considero una particella materiale, mobile nell'universo statico di De Sitter [2]. Detta r la sua distanza dal centro dell'universo stesso, nell'ordinaria teoria della Relatività, dove è possibile determinare la velocità in funzione della posizione, il corpuscolo non può accedere alla regione $r > R$, poiché in essa la sua velocità diverrebbe immaginaria. La costante R rappresenta il raggio dell'universo e l'ipersuperficie $r = R$ costituisce quindi un orizzonte.

Introducendo invece l'ipotesi quantistica e facendo uso dell'equazione di Klein-Gordon, mostro innanzitutto che alla metrica di De Sitter è associata una funzione lagrangiana che non dipende esplicitamente dal tempo; la corrispondente funzione hamiltoniana uguaglia allora, durante il moto, una costante [3], che identifico con l'energia totale relativistica del corpuscolo.

Al limite, trattando come un infinito la velocità c della luce nel vuoto rispetto ad ogni osservatore inerziale, mostro che la precedente equazione

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1972.

si riduce a quella quantistica non relativistica di Schrödinger, riguardante una particella soggetta ad una forza repulsiva, proporzionale alla distanza dal centro dell'universo.

Trovo poi che la densità di probabilità tende a zero al tendere di r all'infinito, ma possiede valori non nulli nella regione $r > R$. Un tale risultato, analogo ad un altro recentemente ottenuto in Relatività ristretta [4], mi sembra connesso al principio di indeterminazione di Heisenberg della Fisica quantistica [5]. In base a questo principio è concettualmente impossibile determinare contemporaneamente, con tutta la loro precisione, sia la posizione, sia la velocità di un corpuscolo; anzi, quanto più è nota la sua posizione, tanto meno determinata ne è la velocità, e viceversa.

Se allora si esegue una osservazione di posizione e si stabilisce con la massima precisione la posizione della particella, nulla si può dire della velocità, che non è concettualmente determinabile. Ne segue che le posizioni della regione $r > R$ non sono, a priori, precluse al corpuscolo, contrariamente a quanto avviene nella teoria relativistica non quantistica, le cui leggi, come ho affermato poc'anzi, forniscono in tali posizioni una velocità immaginaria.

1. L'EQUAZIONE DI STATO

L'equazione tensoriale di stato di Klein-Gordon, che riteniamo valida anche in Relatività generale, è la seguente:

$$(1) \quad g^{\lambda\sigma} \psi_{|\lambda\sigma} + \frac{4\pi^2}{\hbar^2} m^2 c^2 \psi = 0,$$

dove m rappresenta la massa intrinseca della particella, \hbar la costante di Planck, $g^{\lambda\sigma}$ la generica componente controvariante del tensore fondamentale; la barra è infine simbolo di derivazione tensoriale.

Consideriamo dunque una particella materiale, priva di carica elettrica, mobile nell'universo statico di De Sitter. La metrica dello spazio-tempo riemanniano è allora rappresentata dalla seguente forma differenziale quadratica:

$$(2) \quad ds^2 = (1 - \alpha^2 r^2) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

essendo α una costante che verrà in seguito precisata, t il tempo, r, θ, φ le coordinate spaziali. Posto $x_0 = ct, x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \varphi$, nel sistema di riferimento (2) si ha, per le componenti covarianti del tensore fondamentale:

$$(3) \quad g_{00} = 1 - \alpha^2 r^2 \quad ; \quad g_{11} = -\frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} \quad ; \quad g_{22} = -r^2 ; \\ g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad ; \quad g_{\lambda\sigma} = 0 \quad (\lambda \neq \sigma),$$

da cui, per quelle controvarianti:

$$(4) \quad g^{00} = \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} \quad ; \quad g^{11} = -(1 - \alpha^2 r^2) \quad ; \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2} ; \\ g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad ; \quad g^{\lambda\sigma} = 0 \quad (\lambda \neq \sigma).$$

Osserviamo che la metrica del corrispondente spazio geometrico tridimensionale assume la forma:

$$(5) \quad dl^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Dalla (5) segue che il quadrato della distanza fra due punti infinitamente prossimi posti su di una linea di equazione $r = a$, con a costante, è fornito da: $a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$.

Se, in particolare, $r = 0$, tale distanza risulta nulla, ossia la coordinata spaziale r è una coordinata raggio. A causa della prima e della seconda delle (3), le leggi della Meccanica relativistica non quantistica impongono che r si mantenga inferiore a $1/\alpha$. La costante

$$(6) \quad \alpha = \sqrt{\frac{2\pi K\rho}{3c^2}} \simeq \frac{1}{10^9 \text{ anni luce}}$$

si identifica con il reciproco del raggio dell'Universo, essendo K la classica costante di attrazione universale e ρ la densità, pure costante. L'ipersuperficie $r = (1/\alpha)$ costituisce quindi un orizzonte per l'osservatore di De Sitter.

Studiamo ora il comportamento relativistico della particella introducendo l'ipotesi quantistica. La (1), per le (3) e le (4) e per la legge di derivazione covariante, dopo qualche calcolo si presenta sotto la forma:

$$(7) \quad \frac{1}{c^2} \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - (1 - \alpha^2 r^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \\ + 2 \left(2 \alpha^2 r - \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0.$$

Vediamo ora se è possibile soddisfare alla (7) assumendo:

$$(8) \quad \psi = f(r, \theta, \varphi) e^{-\frac{2\pi i E}{\hbar} t},$$

essendo f funzione delle sole coordinate spaziali e la costante E l'energia totale.

2. ENERGIA TOTALE DELLA PARTICELLA

Osserviamo che alla metrica (2) corrisponde la funzione lagrangiana $L = -mc \frac{dr}{dt}$, ossia:

$$(9) \quad L = -mc^2 \sqrt{(1 - \alpha^2 r^2) - \frac{1}{c^2} (1 - \alpha^2 r^2)^{-1} r^2 - \frac{r^2}{c^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)}.$$

Poiché L non dipende esplicitamente dal tempo, risulta notoriamente:

$$(10) \quad \frac{\partial L}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = H,$$

con H costante. Identifichiamo l'energia totale relativistica E che interviene al secondo membro della (8) con la costante H . Dalla (9) e dalla (10) si trae allora:

$$(11) \quad \frac{mc^2(1-\alpha^2 r^2)}{\sqrt{(1-\alpha^2 r^2) - \frac{r^2}{c^2}(1-\alpha^2 r^2)^{-1} - \frac{r^2}{c^2}(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2 \theta \dot{\varphi}^2)}} = E.$$

Sostituendo la (8) nella (7) si ha

$$(12) \quad (1-\alpha^2 r^2) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + 2 \left(\frac{1}{r} - 2\alpha^2 r \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(\frac{E^2}{c^2} \frac{1}{1-\alpha^2 r^2} - m^2 c^2 \right) f = 0.$$

3. SEPARAZIONE DELLE VARIABILI NELL'EQUAZIONE (12)

Cerchiamo ora di soddisfare alla (12) assumendo:

$$(13) \quad f(r, \theta, \varphi) = R(r) y(\theta, \varphi),$$

ossia tramite il noto metodo di separazione delle variabili.

Sostituendo la (13) nella (12) si deduce:

$$(14) \quad \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} r^2 - \frac{4\pi^2 E^2}{c^2 h^2} \frac{r^2}{1-\alpha^2 r^2} - r^2 (1-\alpha^2 r^2) \frac{\ddot{R}}{R} + 2r(2\alpha^2 r^2 - 1) \frac{\dot{R}}{R} = \\ = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{y \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \text{ctg} \theta \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Osserviamo che il primo membro della (14) dipende dalla sola r , mentre il secondo è funzione unicamente di θ e φ ; di conseguenza è necessario che ciascuno di essi uguagli una costante $-D$. Si ha così:

$$(15) \quad \frac{1}{y} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{y \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \text{ctg} \theta \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -D;$$

$$(16) \quad r^2 (1-\alpha^2 r^2) \frac{\ddot{R}}{R} + 2r(1-2\alpha^2 r^2) \frac{\dot{R}}{R} + \\ + \frac{4\pi^2 E^2}{c^2 h^2} \frac{r^2}{1-\alpha^2 r^2} - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} r^2 = D.$$

La (15) coincide con l'equazione che, nella teoria quantistica non relativistica, è valida in tutti i problemi in cui intervengono solo forze centrali dipendenti dalla sola r . Risulta allora:

$$(17) \quad D = l(l+1),$$

con l intero non negativo; detto p un intero, con $|p| \leq l$, si soddisfa alla (15) per mezzo delle funzioni sferiche

$$(17') \quad y_{lp} = A_{lp} e^{ip\varphi} \operatorname{sen} \theta^{|p|} \frac{d^{|p|} P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^{|p|}},$$

essendo A_{lp} costanti a priori arbitrarie e $P_l(\cos \theta)$ generico polinomio di Legendre [6].

La (16), per la (17), può presentarsi sotto la forma:

$$(18) \quad \ddot{R} + \frac{2}{r} \frac{1 - 2\alpha^2 r^2}{1 - \alpha^2 r^2} \dot{R} + \left[\frac{4\pi^2 E^2}{c^2 h^2} \frac{1}{(1 - \alpha^2 r^2)^2} - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} - l(l+1) \frac{1}{r^2(1 - \alpha^2 r^2)} \right] R = 0.$$

4. LA FORMA LIMITE DELL'EQUAZIONE (18)

Passando al limite facendo tendere c all'infinito, dalla (6) si trae:

$$(19) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \alpha = 0.$$

Osserviamo che dalla (11) si deduce:

$$(20) \quad m^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} = \frac{\frac{2}{3} \pi K \rho m^2 r^2 (1 - \alpha^2 r^2) - m^2 \bar{v}^2 - \frac{m^2 \alpha^2 r^2 r^2}{1 - \alpha^2 r^2}}{1 - \alpha^2 r^2 - \frac{\bar{v}^2}{c^2} - \frac{\alpha^2 r^2 r^2}{c^2(1 - \alpha^2 r^2)}},$$

avendo posto:

$$(21) \quad \bar{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2).$$

Dalla (20), per la (19), si trae:

$$(22) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \left(m^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) = -2m \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 - \frac{1}{3} \pi K \rho m r^2 \right).$$

Dalla (5) segue:

$$(23) \quad v^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2 r^2} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2,$$

essendo v la velocità tridimensionale della particella.

Per le (23), (21) e (19) si ha: $\lim_{c \rightarrow \infty} v^2 = \bar{v}^2$. Al limite, la velocità tende così ad assumere la forma (21) che le compete in Meccanica classica, quando la particella è mobile nell'ordinario spazio tridimensionale euclideo, di cui r, θ, ϕ costituiscono un sistema di coordinate polari. Poiché il primo termine posto entro parentesi al secondo membro della (22) si identifica con la classica energia cinetica, la somma del primo e del secondo termine, qualora si inter-

preti $-(1/3)\pi K\rho mr^2$ come energia potenziale V , rappresenta la classica energia totale W . Al limite, la sollecitazione a cui è soggetto il corpuscolo si riduce quindi ad una forza repulsiva proporzionale alla distanza r dal centro dell'universo. Dalla (22) segue: $\lim_{c \rightarrow \infty} \left(m^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} \right) = -2mW$, e la (18) tende all'equazione:

$$(24) \quad \ddot{R} + \frac{2}{r} \dot{R} + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \left[W - V - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0,$$

con $V = -(1/3)\pi K\rho mr^2$. La (24) si identifica con la nota equazione radiale di Schrödinger della Fisica quantistica non relativistica.

5. COMPORTAMENTO DELL'EQUAZIONE (18) AL TENDERE DI r ALL'INFINITO

Per stabilire se, introducendo l'ipotesi quantistica, vi è la probabilità di trovare la particella nella regione $r > (1/\alpha)$, conviene studiare il comportamento della (18) quando r tende a diventare infinitamente grande, facendo intervenire la variabile:

$$(25) \quad u = \frac{1}{r}.$$

Dalla (25) si trae $\dot{R} = -u^2 R'$; $\ddot{R} = u^4 R'' + 2u^3 R'$, dove l'apice indica l'ordinaria derivata di R rispetto ad u . La (18), per la (25), diviene allora:

$$(26) \quad R'' + \frac{2\alpha^2}{u(u^2 - \alpha^2)} R' + \left[\frac{4\pi^2 E^2}{c^2 \hbar^2} \frac{1}{(u^2 - \alpha^2)^2} - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{\hbar^2} \frac{1}{u^2(u^2 - \alpha^2)} - \frac{l(l+1)}{u^2 - \alpha^2} \right] R = 0.$$

Osserviamo che per $r \rightarrow \infty$, ossia per $u \rightarrow 0$, l'equazione differenziale lineare del secondo ordine (26) presenta una singolarità fuchsiana, poiché il coefficiente di R' diviene infinito del primo ordine e quello di R del secondo ordine. Cerchiamo allora di integrare la (26) ponendo:

$$(27) \quad R = u^\gamma \sum_0^\infty a_s u^s,$$

dove γ e i coefficienti a_s rappresentano costanti disponibili, con la condizione:

$$(28) \quad a_0 \neq 0 \quad [7].$$

Sostituendo la (27) nella (26) ed annullando i coefficienti delle potenze di u si constata che, ponendo $a_1 = 0$, risultano nulli tutti i coefficienti a_s , con s *dispari*, mentre per s *pari* si trae:

$$(29) \quad \left(\gamma^2 - 3\gamma + \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{\hbar^2 \alpha^2} \right) a_0 = 0;$$

$$2\alpha^4 (2\gamma - 1) a_2 + \left[\frac{4\pi^2}{\hbar^2} \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \right) + 2\gamma\alpha^2 (4 - \gamma) + \alpha^2 l(l+1) \right] a_0 = 0.$$

Si ha infine la seguente formula ricorrente, tenendo conto della prima delle (29) e della (28):

$$(30) \quad \left[s^2 - 9s + 20 + 2\gamma(s-4) - l(l+1) - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2 \alpha^2} \right] a_{s-4} + \\ + \left[2\alpha^2(s-2)(1-2\gamma) - 2\alpha^2(s^2 - 5s + 6) + 2\alpha^2\gamma + \right. \\ \left. + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \right) + \alpha^2 l(l+1) + \frac{8\pi^2 m^2 c^2}{h^2} \right] a_{s-2} + \\ + \alpha^4 (s^2 - 3s + 2\gamma s) a_s = 0 \quad (s = 4, 6, 8, \dots).$$

La prima delle (29), per la (28), fornisce γ quale radice di una equazione di secondo grado. Si ha precisamente:

$$(31) \quad \gamma_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{9 - \frac{16\pi^2 m^2 c^2}{h^2 \alpha^2}} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{9 - \frac{16\pi^2 m^2 c^2}{h^2 \alpha^2}}.$$

I due valori γ_1 e γ_2 precisati dalle (31) dipendono dalla massa intrinseca m del corpuscolo; poiché $h \simeq 6,6 \cdot 10^{-34}$ kg m² sec⁻¹, $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m sec⁻¹, essi, a causa della (6), risultano complessi coniugati a partire da un piccolissimo valore di m , inferiore alla massa $9,09 \cdot 10^{-31}$ kg dell'elettrone.

Poiché la differenza $\gamma_1 - \gamma_2$ non uguaglia un numero intero [8], l'equazione (26) ammette due integrali fondamentali della forma (27).

Attribuito ad a_0 un valore arbitrario, complesso o reale purché non nullo, la seconda delle (29) fornisce a_2 , la (30), per $s = 4$, determina univocamente a_4 , per $s = 6$ determina a_6 , ecc.

La regione di convergenza della serie (27) si estende fino al più prossimo punto di singolarità, ossia, come si constata facilmente dalla (26), fino ad $u = \alpha$, dove esiste una seconda singolarità fuchsiana.

La densità di probabilità $\psi\psi^*$, per le (8), (13), (17'), (27) e (31), si annulla per $u = 0$, ossia all'infinito, ma risulta non nulla per $0 < u < \alpha$; esiste quindi probabilità, mediante una misura di posizione, di trovare il corpuscolo oltre l'orizzonte non quantistico dell'osservatore di De Sitter.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Cfr. L. SCHIFF, *Meccanica quantistica*, p. 443, Torino 1959.
- [2] Cfr. A. S. EDDINGTON, *The mathematical theory of Relativity*, p. 161, Cambridge 1954.
- [3] Cfr. B. FINZI, *Meccanica razionale*, vol. 2, p. 268, Bologna 1950.
- [4] C. VENINI, *Comportamento quantistico di una particella rispetto ad un osservatore uniformemente ruotante in Relatività ristretta*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 52, 462 (1972).
- [5] Cfr. E. PERSICO, *Fondamenti della Meccanica atomica*, p. 145, Bologna 1936.
- [6] Cfr. [5], p. 220.
- [7] Cfr. [1], p. 136.
- [8] Cfr. [5], p. 129.