Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Froim Marcus, Reuven R. Rottenberg

Les Surfaces Cubiques à Congruences Planaires

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.1, p. 57–67.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_1_57_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Geometria. — *Les Surfaces Cubiques à Congruences Planaires.* Nota di FROIM MARCUS e REUVEN R. ROTTENBERG, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si studiano le corrispondenze asintotiche fra due superfici che mutano una famiglia a due parametri di curve piane dell'una in una famiglia analoga dell'altra, con particolare riguardo alle superfici cubiche rigate ed alle superfici cubiche tetraedrali.

1. Dans [6], Rottenberg a étudié des correspondances entre deux surfaces qui conservent une famille à deux paramètres de courbes planes formant une congruence planaire sur chacune de ces surfaces. Dans [7] et [8], le même Auteur a donné des exemples de surfaces possédant de telles congruences, entre autres la surface tétraédrale cubique (non–réglée) et la surface de Cayley (cubique réglée).

Dans la présente étude, nous considérons d'abord des correspondances asymptotiques qui conservent une famille à deux paramètres de courbes planes et obtenons des relations simples entre les coefficients $\beta , \gamma , \bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ des deux surfaces. Etudiant, à titre d'exemple, les cas particuliers où β et γ sont constants, nous retrouvons les deux surfaces cubiques citées ci–haut. Nous montrons, ensuite, en relation avec ces correspondances asymptotiques, des propriétés qui sont caractéristiques de ces surfaces cubiques.

2. Dans un espace projectif réel, soit S une surface qui n'est pas une développable ni une quadrique. On peut supposer S rapportée à ses lignes asymptotiques $u =$ const., $v =$ const. Les coordonnées homogènes (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) d'un point générique x de S, données en fonction des paramètres asymptotiques u , v, et normées dans le sens de Wilczynski, satisfont le système complètement intégrable d'équations différentielles bien connu:

$$x_{uu} = \beta x_v + p_{11} x \quad , \quad x_{vv} = \gamma x_u + p_{22} x , \tag{2.1}$$

et les conditions d'intégrabilité sous la forme de Fubini sont:

$$\begin{gathered} L_v + 2 \beta\gamma_u + \gamma\beta_u = 0 \quad , \quad M_u + 2 \gamma\beta_v + \beta\gamma_v = 0 , \\ \beta M_v + 2 \beta_v M + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2 \gamma_u L + \gamma_{uuu} , \end{gathered} \tag{2.2}$$

où:

$$L = - \beta_v - 2 p_{11} \quad , \quad M = - \gamma_u - 2 p_{22} . \tag{2.3}$$

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1973.

Si la surface est réglée, on supposera – ce qui est toujours possible en interchangeant les u et v – que les $u =$ const. sont les droites de la surface et par conséquent $\gamma = 0$.

Les courbes planes sur la surface S sont solutions de l'équation différentielle:

$$(x\,, dx\,, d^2x\,, d^3x) = 0 \tag{2.4}$$

et si la courbe C : $v = v(u)$ est plane sur S, on peut utiliser (2.1) pour développer (2.4) et on obtient l'équation des courbes planes sur S:

$$\begin{gathered}2\,v'\,v''' - 3\,v''^2 - 4\,(\gamma v'^3 + \beta)\,v'' + \gamma^2\,v'^6 - 2\,\gamma_v\,v'^5 - \\ - 2\,(\gamma_u + 2\,\pi_{22})\,v'^4 + 2\,(\beta_v + 2\,\pi_{11})\,v'^2 + 2\,\beta_u\,v' - \beta^2 = 0\end{gathered} \tag{2.5}$$

avec:

$$\pi_{11} = p_{11} + \beta_v \quad , \quad \pi_{22} = p_{22} + \gamma_u \tag{2.6}$$

et v', v'', v''' sont les dérivées de $v(u)$ par rapport à u.

Nous considérons alors un point A $(u_0\,, v_0)$ de S où $\beta \neq 0$, et les courbes planes C sur S qui au point A sont tangentes à l'asymptotique $v = v_0$, donc en A : $v' = 0\,, x' = x_u$. Substituant dans (2.5) on obtient:

$$(v'' + \beta)\,(3\,v'' + \beta) = 0\,. \tag{2.7}$$

On a donc deux cas possibles: $v'' = -\beta$ et $v'' = -\frac{1}{3}\beta$ au point A. Si $v'' = -\beta$, on trouve que:

$$x'' = \frac{d^2x}{du^2} = p_{11}\,x\,; \tag{2.8}$$

donc le plan osculateur de la courbe C au point A (défini par les points $x\,, x', x''$) est indéterminé et la courbe a un point d'inflexion en A.

Si $v'' = -\frac{1}{3}\beta$, on trouve:

$$x'' = \frac{2}{3}\beta x_v + p_{11}\,x \tag{2.9}$$

et le plan osculateur de C en A coincide avec le plan tangent. Or C est plane, donc C est la branche de la section de S, par le plan tangent en A, qui est tangente en ce point à l'asymptotique $v = v_0$.

On obtient des résultats similaires pour une courbe $u = u(v)$ qui au point A est tangente à l'asymptotique $u =$ const. avec $\gamma \neq 0$, en remplaçant v'' par u'' et β par γ dans les équations ci-dessus.

On peut obtenir les résultats ci-dessus sous une autre forme. On sait [2] que l'équation d'une courbe C sur une surface S, qui au point O $(u = 0\,, v = 0)$ est tangente à l'asymptotique $v = 0$ (ou $u = 0$), est donnée par:

$$v = -\frac{h}{2}\,\beta u^2 + (3) \tag{2.10}$$

ou bien respectivement:

$$(2.11) \qquad u = -\frac{h}{2}\gamma v^2 + (3).$$

où (3) indique des termes du troisième ordre au moins au point O, h une constante telle que $(1-h)$ est l'invariant de contact de la courbe C avec l'asymptotique $v=0$ ($u=0$ respectivement).

De même, on sait que h ne change pas si on change les paramètres asymptotiques. Le plan osculateur au point O de la courbe C dépend seulement de la valeur de $(1-h)$. Si $h=1$, C a en O un point d'inflexion et le plan osculateur est indéterminé. Mais si

$$(2.12) \qquad 3h = 1,$$

le plan osculateur de C en O est stationnaire et coïncide avec le plan tangent en O à la surface S. Dans ce cas, la quadrique osculatrice Q_u (Q_v) de la courbe (2.10) (ou (2.11)) est la quadrique de Fubini, alors que pour $h=1$ Q_u (Q_v) est la quadrique de Wilczynski-Bompiani.

3. Soit T une correspondance bi-univoque asymptotique entre deux surfaces non-développables S et $\overline{S}$; on peut supposer qu'aux points homologues de S et $\overline{S}$ les paramètres asymptotiques u et v ont mêmes valeurs. Les coordonnées x d'un point de S satisfont un système d'équations (2.1) et une courbe C plane sur S est solution de l'équation (2.5). On obtient, pour les coordonnées $\overline{x}$ de $\overline{S}$ et une courbe plane sur $\overline{S}$ des équations similaires $\overline{(2.1)}$ et $\overline{(2.5)}$ obtenues en remplaçant $\beta, \gamma, p_{11}, p_{22}, \pi_{11}, \pi_{22}$ par $\overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{p_{11}}, \overline{p_{22}}, \overline{\pi_{11}}, \overline{\pi_{22}}$.

Une courbe $v = v(u)$ qui est plane sur S et sur $\overline{S}$ est solution des deux équations (2.5) et $\overline{(2.5)}$ à la fois, elle est donc solution aussi de l'équation différence de celles-ci, soit:

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} &4[(\overline{\gamma}-\gamma)v'^3 + (\overline{\beta}-\beta)]v'' - (\overline{\gamma}^2-\gamma^2)v'^6 + 2(\overline{\gamma}_v-\gamma_v)v'^5 + \\ &+ 2[(\overline{\gamma}_u-\gamma_u) + 2(\overline{\pi_{22}}-\pi_{22})]v'^4 - 2[(\overline{\beta}_v-\beta_v) + 2(\overline{\pi_{11}}-\pi_{11})]v'^2 + \\ &- 2(\overline{\beta}_u-\beta_u)v' + (\overline{\beta}^2-\beta^2) = 0. \end{aligned}$$

Si $\beta=\overline{\beta}, \gamma=\overline{\gamma}, p_{11}=\overline{p_{11}}, p_{22}=\overline{p_{22}}$, donc $\pi_{11}=\overline{\pi_{11}}$ et $\pi_{22}=\overline{\pi_{22}}$, T transforme toute courbe plane de S en une courbe plane de $\overline{S}$ et réciproquement. D'un théorème de G. Fubini [1], on conclut que T est induite par une homographie entre les espaces ambiants de S et $\overline{S}$.

Si $\beta=\overline{\beta}, \gamma=\overline{\gamma}$, mais $p_{11}\neq\overline{p_{11}}$ ou $p_{22}\neq\overline{p_{22}}$, T est une déformation projective et conserve, au maximum, deux familles à un paramètre de courbes planes qui forment un réseau R; voir [3] pour les détails. Dans ce cas, (3.1) est réduit à une équation du premier ordre.

Dans le cas général où (3.1) est une équation du second ordre, on aura $\beta\neq\overline{\beta}$ ou $\gamma\neq\overline{\gamma}$. Supposons $\beta\neq\overline{\beta}$ et considérons, en une paire de points homologues A sur S et $\bar{A}$ sur $\bar{S}$ une courbe $v = v(u)$ qui soit plane sur les deux surfaces et qui soit tangente à l'asymptotique $v =$ const. en ces points; donc $v' = 0$ et (3.1) se réduit alors à la condition:

$$4v'' + \beta + \bar{\beta} = 0 \qquad (\beta \neq \bar{\beta}). \tag{3.2}$$

Utilisant les résultats du § 2 et l'équation (2.7) on a donc deux cas possibles:

Premier cas: au point A : $v'' = -\frac{1}{3}\beta$, de (3.2) on obtient $\bar{\beta} = \frac{1}{3}\beta$ ou $\beta = 3\bar{\beta}$ et $v'' = -\bar{\beta}$ en $\bar{A}$. Donc, sur S, la courbe $v(u)$ en question est dans le plan tangent en A, alors que sur $\bar{S}$ la courbe homologue (également plane) a un point d'inflexion en $\bar{A}$ et n'est pas dans le plan tangent.

Deuxième cas: $v'' = -\beta$ en A, de (3.2) il ressort: $\bar{\beta} = 3\beta$, $v'' = -\frac{1}{3}\bar{\beta}$ en $\bar{A}$ et les conclusions sont inverses à celles du premier cas: la courbe $v(u)$ sur $\bar{S}$ est dans le plan tangent en $\bar{A}$, et son homologue sur S n'est pas dans le plan tangent.

On peut ramener le premier cas au second en interchangeant S et $\bar{S}$. Nous avons donc prouvé le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* T *une correspondance bi-univoque asymptotique entre deux surfaces* S *et* $\bar{S}$ *telle qu'en des points homologues les paramètres asymptotiques ont mêmes valeurs, et* $\beta \neq \bar{\beta}$. *Une condition nécessaire pour qu'en tout point* A *de* S *il existe une courbe plane* C *tangente en* A *à l'asymptotique* $v =$ *const. telle que son image* $\bar{C} = T(C)$ *sur* $\bar{S}$ *soit également plane (et tangente au point homologue* $\bar{A}$ *à l'asymptotique* $v =$ *const.) (et inversement) est que l'on ait* $\bar{\beta} = 3\beta$ *(ou* $\beta = 3\bar{\beta}$*). Si ces conditions sont réalisées la courbe* $\bar{C}$ *est dans le plan tangent en* $\bar{A}$ *à la surface* $\bar{S}$ *(si* $\beta = 3\bar{\beta}$ *les rôles de* S *et* $\bar{S}$ *sont inversés).*

De façon analogue, si $\gamma \neq \bar{\gamma}$ et en tout point A de S il existe une courbe plane Γ : $u = g(v)$ tangente en A à l'asymptotique $u =$ const. telle que son image $T(\Gamma)$ sur $\bar{S}$ soit également plane, on aura $\bar{\gamma} = 3\gamma$ (ou $\gamma = 3\bar{\gamma}$), et sur $\bar{S}$ cette courbe est dans le plan tangent en $\bar{A}$ à la surface $\bar{S}$ (si $\gamma = 3\bar{\gamma}$, on interchange S et $\bar{S}$).

Un résultat immédiat de ce qui précède est le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Une correspondance bi-univoque entre deux surfaces* S *et* $\bar{S}$ *(qui ne sont ni des développables ni des quadriques) qui applique les deux branches de chaque section plane de* S *par un plan tangent, sur les deux branches de la section plane de* $\bar{S}$ *par le plan tangent au point homologue, est induite par une homographie des espaces ambiants.*

Démonstration. Il est clair que la correspondance est asymptotique et conserve une famille à *deux* paramètres de courbes planes, et n'est donc pas une déformation projective. On peut supposer que des points homologues correspondent aux mêmes valeurs des paramètres convenablement choisis.

Si $\beta \neq \bar{\beta}$, des résultats précédents on tire que la branche de la section d'une des surfaces par un plan tangent, qui est tangente à l'asymptotique $v =$ const., est transformée sur l'autre surface en une courbe plane qui *n'est pas* dans le plan tangent en général, en contradiction avec les données de ce théorème. On doit donc avoir $\beta = \bar{\beta}$, et de même $\gamma = \bar{\gamma}$. La correspondance, n'étant pas une déformation projective, est donc induite par une homographie.

4. Nous donnons maintenant des exemples de correspondances asymptotiques entre deux surfaces qui satisfont au Théorème 1. Soit S une surface munie de paramètres asymptotiques tels que β et γ soient constants (pas nuls tous deux) et $p_{11} = p_{22} = 0$. Soit $\bar{S}$ une seconde surface en correspondance asymptotique avec S (des points homologues ont même valeur des paramètres asymptotiques u, v) et telle que:

$$\bar{\beta} = 3\beta = \text{const.}, \quad \bar{\gamma} = 3\gamma = \text{const.}, \quad \overline{p_{11}} = \overline{p_{22}} = 0. \tag{4.1}$$

L'équation (3.1) se réduit à:

$$(\gamma v'^3 + \beta)(v'' + \beta - \gamma v'^3) = 0. \tag{4.2}$$

Une famille de solutions de (4.2) est constituée par les intégrales de l'équation

$$v'' + \beta - \gamma v'^3 = 0. \tag{4.3}$$

Après dérivation et substitution de ces données dans les équations (2.5) et $(\overline{2.5})$ on obtient des identités, autrement dit toutes les courbes intégrales de (4.3) sont planes sur S et $\bar{S}$. On peut aussi vérifier qu'en chaque paire de points homologues il passe deux courbes – planes sur les deux surfaces – solutions de (4.3) et tangentes en ces points aux asymptotiques $v =$ const. et $u =$ const. respectivement.

Nous retrouverons l'équation (4.3) plus loin avec une autre interprétation.

Des résultats du § 3, il ressort que sur $\bar{S}$ cette famille des courbes planes intégrales de (4.3) contient les sections de $\bar{S}$ par ses plans tangents.

Sur S les plans contenant les courbes correspondantes sont déterminés par les points x, x', x''. Or, utilisant les équations (2.1) et (4.3) et les données ci–haut on obtient:

$$x'' = \gamma v'^2 x' + 2 v' x_{uv}; \tag{4.4}$$

donc le point x_{uv} – indépendant de la courbe plane – est dans le plan de la courbe. Autrement dit, tous les plans contenant les courbes intégrales de (4.3) passant par un point x de S forment un faisceau dont l'axe est la droite (x, x_{uv}). D'autre part, le point $y = \beta\gamma x - x_{uv}$, qui est sur cette droite est tel que $y_u = y_v = 0$, donc ce point est fixe dans l'espace. Notons que x_{uv} coincide avec y si $\beta\gamma = 0$.

Nous avons donc montré que, pour une surface S du type considéré, tous les plans des courbes planes solutions de (4.3) appartiennent à une gerbe de plans dont le sommet est le point fixe $\beta\gamma x - x_{uv}$.

Appliquant les Théorèmes 6 et 7 de Rottenberg [6], on conclut que sur $\bar{S}$ la famille correspondante de courbes planes solutions de (4.3) est une congruence planaire non-triviale, ou congruence P, donc $\bar{S}$ est une surface planaire (voir aussi Rottenberg [7]). Rappelons la définition d'une surface planaire:

Une surface est dite « planaire » s'il existe une application biunivoque d'un plan sur la surface telle que les droites du plan correspondent à une famille à deux paramètres de courbes *planes* sur la surface, les plans de ces courbes n'appartenant pas à une gerbe. Cette famille de courbes planes est alors appelée une congruence P sur la surface.

La seconde famille de solutions de (4.2) est donnée par:

$$\gamma v'^3 + \beta = 0 ; \tag{4.5}$$

ce sont les courbes de Darboux [4, pp. 76–77] données, dans notre cas, par l'équation:

$$\gamma^{1/3} v + \beta^{1/3} u = c . \tag{4.6}$$

Elles sont planes sur les deux surfaces S et $\bar{S}$ et, si les surfaces sont réglées, $\gamma = \bar{\gamma} = 0$, elles coincident avec les génératrices rectilignes $u =$ const.

Nous montrons, maintenant, que les surfaces S et $\bar{S}$ considérées dans cette section sont de deux types connus.

Premier cas: $\beta\gamma \neq 0$, les surfaces ne sont pas réglées. Par un changement de paramètres (voir [4, p. 70]):

$$\bar{u} = (\beta^2 \gamma)^{1/3} u \quad , \quad \bar{v} = (\beta\gamma^2)^{1/3} v \tag{4.7}$$

on obtient $\beta = \gamma = 1$ sur S et $\bar{\beta} = \bar{\gamma} = 3$ sur $\bar{S}$, et $p_{11} = p_{22} = \bar{p}_{11} = \bar{p}_{22} = 0$.

Comme on le sait, voir par exemple B. Segre [9, p. 62], S et $\bar{S}$ sont des surfaces (cubiques) dites tétraèdrales. On retrouve ainsi une partie du résultat donné dans le Théorème 7 de [8] que nous répétons ici: la surface tétraèdrale est une surface planaire, une congruence P sur cette surface est formée par ses trois droites, les courbes de Segre et les sections par les plans tangents ne passant pas par une des trois droites. Les courbes de Darboux, également planes sur la surface tétraèdrale, ne font pas partie de la congruence P, ainsi qu'on l'a montré dans [8].

Deuxième cas: S et $\bar{S}$ sont réglées et les $u =$ const. sont les génératrices rectilignes, donc $\gamma = \bar{\gamma} = 0$, $\bar{\beta} = 3\beta \neq 0$. Par le changement de paramètres:

$$U = u \quad , \quad V = \frac{1}{\beta} v \tag{4.8}$$

on se réduit au cas où: $\beta = 1$, $\bar{\beta} = 3$, $p_{11} = p_{22} = \bar{p}_{11} = \bar{p}_{22} = 0$.

En intégrant le système (2.1), qui se réduit pour S à: $x_{uu} = x_v$, $x_{vv} = 0$, on obtient:

$$(4.9) \qquad x_1 = u \quad , \quad x_2 = \frac{3}{2} u^2 + 3 v \quad , \quad x_3 = \frac{1}{2} u^3 + 3 uv \quad , \quad x_4 = 1$$

ou

$$x_1^3 - x_1 x_2 x_4 + x_3 x_4^2 = 0$$

et pour $\overline{S}$ avec $\overline{x}_{uu} = 3 \overline{x}_v$, $\overline{x}_{vv} = 0$ on aura:

$$(4.10) \qquad \overline{x}_1 = u \quad , \quad \overline{x}_2 = \frac{3}{2} u^2 + v \quad , \quad \overline{x}_3 = \frac{1}{2} u^3 + uv \quad , \quad \overline{x}_4 = 1$$

ou

$$\overline{x}_1^3 - \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_4 + \overline{x}_3 \overline{x}_4^2 = 0 .$$

Les deux surfaces sont des cubiques réglées (surfaces de Cayley) et ici encore nous retrouvons une partie du Théorème 5 de [8]: les surfaces cubiques réglées sont planaires; l'ensemble des courbes planes sections d'une telle surface par ses plans tangents, y compris les génératrices, forment une congruence P.

5. Les résultats ci–haut suggèrent le problème suivant: existe–t–il une correspondance asymptotique – qui ne soit pas induite par une homographie – entre deux surfaces S et $\overline{S}$ qui ne sont pas des surfaces tétraédrales ou des surfaces cubiques réglées, telle que la famille à deux paramètres des courbes intégrales de l'équation (4.3) soient planes sur les deux surfaces? Nous nous proposons de montrer dans ce qui suit que la réponse à cette question est négative pour la surface $\overline{S}$. Plus précisément, pour des surfaces non–réglées, *la propriété ci–dessus caractérise la surface tétraédrale cubique, alors que pour des surfaces réglées, une des surfaces est nécessairement cubique, mais pas l'autre.*

Supposons, d'abord, que la courbe (2.10) (ou (2.11)), dont nous répétons ici les équations:

$$(2.10) \qquad v = -\frac{h}{2} \beta u^2 + (3) ,$$

$$(2.11) \qquad u = -\frac{h}{2} \gamma v^2 + (3) ,$$

avec la condition $h = \frac{1}{3}$, soit plane sur la surface S. Pour que cette courbe soit également plane sur $\overline{S}$, il est nécessaire que l'on ait au point O ($u = 0$, $v = 0$)

$$(5.1) \qquad 3 \overline{\beta}^2 - 4 \beta\overline{\beta} + \beta^2 = 0 , \qquad \text{ou} \quad (\overline{\beta} - \beta)(3 \overline{\beta} - \beta) = 0 ,$$

cette équation étant obtenue en substituant $v' = 0$, $v'' = -\frac{1}{3} \beta$ dans l'équation $(\overline{3.1})$.

De (5.1) on obtient deux cas possibles:

$$\bar{\beta} = \beta \, (\bar{\gamma} = \gamma) \tag{5.2}$$

ou

$$3\,\bar{\beta} = \beta \, (3\,\bar{\gamma} = \gamma) \, , \tag{5.3}$$

et on retrouve ainsi les résultats du § 3 ci–dessus.

Dans le premier cas, la correspondance est une *demi–déformation asymptotique* [2] et l'équation de la courbe $\bar{C}$ sur $\bar{S}$ est:

$$v = -\frac{1}{6}\,\bar{\beta} u^2 + (3) \qquad \left(u = -\frac{1}{6}\,\bar{\gamma} v^2 + (3)\right), \tag{5.4}$$

alors que dans le second cas la correspondance est, d'après Bompiani [2], une *demi–similitude projective* entre les deux surfaces. L'équation de la courbe $\bar{C}$ sur $\bar{S}$ est alors:

$$v = -\frac{1}{2}\,\bar{\beta} u^2 + (3) \qquad \left(u = -\frac{1}{2}\,\bar{\gamma} v^2 + (3)\right); \tag{5.5}$$

donc sur $\bar{S} : \bar{h} = 1$ *et la courbe* $\bar{C}$ *a au point correspondant* $\bar{O}$ *un point d'inflexion.*

Si l'on suppose que, sur la surface S, $h = 1$, on obtient de façon similaire les conditions inverses:

$$\bar{\beta} = \beta \quad \text{ou} \quad \bar{\beta} = 3\,\beta \qquad (\bar{\gamma} = \gamma \ \ \text{ou} \ \ \bar{\gamma} = 3\,\gamma) . \tag{5.6}$$

Dans [5] F. Marcus a montré que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une correspondance entre les courbes $v = v(u)$ d'une surface S dont les plans osculateurs passent par la droite $(x \, , x_{uv})$ ou la droite $(x \, , x_{uv} - l_1 \, x_v - l_2 \, x_u)$ et les droites d'un plan, sont:

$$\pi_{11\,v} = \pi_{22\,u} = 0 \, . \tag{5.7}$$

Par un changement des paramètres asymptotiques on peut réduire les conditions (5.7) aux suivantes:

$$\pi_{11} = \pi_{22} = 1 \tag{5.8}$$

et montrer alors que la droite $(x \, , x_{uv})$ engendre une congruence W non–dégénérée [3].

Dans le cas:

$$\pi_{11} = \pi_{22} = 0 \, , \tag{5.9}$$

les droites $(x \, , x_{uv})$ passent par un point fixe, parceque les développables de la congruence sont indéterminées [3].

Les équations des courbes dont les plans osculateurs passent par la droite $(x \, , x_{uv})$ ou par la droite $(x \, , x_{uv} - l_1 \, x_v - l_2 \, x_u)$ sont respectivement:

$$v'' + \beta - \gamma v'^3 = 0 \tag{5.10}$$

et

$$v'' - \gamma v'^3 - 2\, l_2\, v'^2 + 2\, l_1\, v' + \beta = 0\,, \tag{5.11}$$

et (5.10) est évidemment l'équation (4.3) ainsi retrouvée.

On peut vérifier aisément que les courbes intégrales de (5.10) ou (5.11) sont des courbes planes si et seulement si:

$$\pi_{11} = \pi_{22} = 0 \tag{5.12}$$

et respectivement:

$$l_{2u} - l_{1v} = 0 \quad , \quad \pi_{11} - l_{1u} - l_2\beta - l_1^2 = 0 \quad , \quad \pi_{22} - l_{2v} - l_1\gamma - l_2^2 = 0. \tag{5.13}$$

Soient maintenant S et $\bar{S}$ deux surfaces – qui ne sont pas des quadriques – en correspondance asymptotique, les points correspondants ayant mêmes valeurs des paramètres asymptotiques, et telles que les courbes intégrales de (5.10) soient planes sur S; et cherchons des conditions pour que les courbes correspondantes sur $\bar{S}$ soient également planes.

De l'équation (3.1), en tenant compte de (5.10) et (5.12), on obtient une équation du sixième degré en $v'(u)$, qui s'annulle identiquement si et seulement si:

$$\bar{\beta} = \beta\,, \bar{\gamma} = \gamma \quad , \quad \bar{\pi}_{11} = \bar{\pi}_{22} = 0 \tag{5.14}$$

ou

$$\begin{aligned} &\bar{\beta} = 3\,\beta \qquad \bar{\gamma} = 3\,\gamma \quad , \quad \beta_u = \bar{\beta}_u = \gamma_v = \bar{\gamma}_v = 0\,, \\ &\bar{\pi}_{11} = -\,\beta_v \quad , \quad \bar{\pi}_{22} = -\,\gamma_u \qquad (\bar{p}_{11} = -\,4\,\beta_v\,, \bar{p}_{22} = -\,4\,\gamma_u)\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dans le premier cas (5.14), la correspondance entre S et $\bar{S}$ est induite par une homographie et pour toute courbe sur S, la courbe correspondante sur $\bar{S}$ est également plane.

Considérons maintenant le cas où les équations (5.15) sont satisfaites. Tenant compte de (5.12) et (5.15) les conditions d'intégrabilité (2.2) pour la surface S se réduisent à:

$$\beta_{vv} + 2\,\beta\gamma_u = 0 \quad , \quad \gamma_{uu} + 2\,\gamma\beta_v = 0 \quad , \quad \beta_{vvv} = \gamma_{uuu}\,, \tag{5.16}$$

la troisième condition étant d'ailleurs une conséquence des deux premières à cause de (5.15).

Dans le cas où S n'est pas réglée, $\beta\gamma \neq 0$, $\bar{S}$ aussi n'est pas réglée. De (5.15) on a $\beta = \beta(v)$, $\gamma = \gamma(u)$; il ressort alors de (5.16) que β et γ sont constants, et de (2.6) et (5.12): $p_{11} = p_{22} = 0$. On retrouve ainsi le premier cas du § 4: S et $\bar{S}$ sont des surfaces cubiques tétraédrales.

Nous avons donc le résultat suivant: *La condition nécessaire et suffisante pour que dans une correspondance asymptotique entre deux surfaces non-réglées, correspondance qui n'est pas induite par une homographie, les courbes* *hypergéodésiques intégrales de l'équation* (5.10) *soient planes sur les deux surfaces*, *est que celles-ci soient des surfaces tétraédrales cubiques.*

Dans le cas où S est une surface réglée, on peut supposer $\gamma = 0$, donc $\overline{\gamma} = 3\gamma = 0$, $\overline{S}$ aussi est réglée. Les équations (5.16) se réduisent alors à l'équation unique:

$$\beta_{vv} = 0. \tag{5.17}$$

On obtient alors, utilisant (2.6), (5.12), (5.16) et (5.17), les coefficients suivants pour S:

$$\beta = av + b \quad , \quad \gamma = 0 \quad p_{11} = -a \quad , \quad p_{22} = 0, \tag{5.18}$$

où a, b sont des constantes; les équations (2.1) se réduisent à:

$$x_{uu} = (av + b)\, x_v - ax \quad , \quad x_{vv} = 0. \tag{5.19}$$

Pour la surface $\overline{S}$ on a respectivement:

$$\overline{\beta} = 3\beta = 3(av + b) \quad , \quad \overline{\gamma} = 0 \quad , \quad \overline{p_{11}} = -4\beta_v = -4a \quad , \quad \overline{p_{22}} = 0, \tag{5.20}$$

$$\overline{x}_{uu} = 3(av + b)\,\overline{x}_v - 4a\overline{x} \quad , \quad \overline{x}_{vv} = 0. \tag{5.21}$$

Si $a = 0$, on aura $\beta =$ const., $p_{11} = p_{22} = 0$ et on retrouve le second cas traité au § 4: S et $\overline{S}$ sont *des surfaces cubiques réglées de Cayley.*

Supposons alors $a \neq 0$ et posons $\alpha = \sqrt{-a}$ (α peut-être complexe). On obtient alors pour $\overline{S}$ une solution du système (5.21) comme suit:

$$\overline{x}_1 = (av + b)\, e^{\alpha u} \quad , \quad \overline{x}_2 = (av + b)\, e^{-\alpha u} \quad , \quad \overline{x}_3 = e^{2\alpha u} \quad , \quad \overline{x}_4 = e^{-2\alpha u}, \tag{5.22}$$

ou encore: $\overline{x}_1^2\,\overline{x}_4 - \overline{x}_2^2\,\overline{x}_3 = 0$; en coordonnées non-homogènes: $\overline{x}^2 = \overline{y}^2\,\overline{z}$. On voit que $\overline{S}$ est une surface cubique réglée dont les génératrices rectilignes $u =$ const. sont données par les équations $\overline{z} = c$, $\overline{x} = \pm\, cy$ (c const). La droite $\overline{x} = \overline{y} = 0$ sur $\overline{S}$ est une directrice double, correspondant à $v = -b/a$, alors que la droite à l'infini dans le plan $\overline{z} = 0$ ($\overline{x}_3 = \overline{x}_4 = 0$) est une directrice simple.

Si l'on résout pour S le système (5.19) avec $a \neq 0$ on obtient:

$$x_1 = av + b \quad , \quad x_2 = (av + b)\, u \quad , \quad x_3 = e^{\alpha u} \quad , \quad x_4 = e^{-\alpha u}, \tag{5.23}$$

qui est une surface réglée non-algébrique. Nous avons donc le résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que dans une correspondance asymptotique (*qui n'est pas induite par une homographie*) *entre deux surfaces réglées* S *et* $\overline{S}$ (*non développables ni quadriques*), *les courbes hypergéodésiques intégrales de l'équation* (5.10) *soient planes sur les deux surfaces est que la surface* $\overline{S}$ *soit une surface cubique réglée. Si* $\overline{S}$ *est une surface de Cayley* ($\overline{\beta} =$ *const.*) *alors* S *est elle-aussi une surface de Cayley.*

Notons que sur S on a $x_{uv} = (0, a, 0) =$ const. et les plans contenant les courbes intégrales de l'équation (5.10) passent par ce point.

Si l'on suppose $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$ on obtient unré sultat analogue au précédent en interchangeant les u et les v, l'équation (5.10) devenant alors l'équation analogue:

$$u'' + \gamma - \beta u'^3 = 0 \tag{5.24}$$

avec

$$u'' = d^2 u/dv^2 = - v''/v'^3 \quad , \quad u' = du/dv = 1/v'.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] FUBINI G., *Definizione Proiettivo–Differenziale di una Superficie*, « Atti della R. Accad. d. Sc. di Torino », *49*, 786–802 (1914).

[2] FUBINI G. et ČECH E., *Geometria Proiettivo Differenziale*, Appendice 2 (Bologna, Zanichelli, 1929).

[3] FUBINI G. et ČECH E., *Introduction à la Géométrie Projective Différentielle des Surfaces*, (Paris, Gauthiers–Villars 1931), pp. 203–205.

[4] LANE E. P., *Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces*, The University of Chicago (1932).

[5] MARCUS F., *Sur une représentation plane des surfaces*, « Annales Scientifiques de l'Université de Jassy », *30*, 1–7 (1944–1947).

[6] ROTTENBERG R. R., *Correspondances entre surfaces à congruences planaires*, « Rendic. di Mat. e delle sue Appl. », *25*, 1–15 (1966).

[7] ROTTENBERG R. R., *Surfaces planaires et congruences P*, Note I, « Atti Accad. Naz. dei Lincei, Classe di Sc. Fis., Mat. e Nat. », *42*, 28–34 (1967).

[8] ROTTENBERG R. R., *Surfaces planaires et congruences P*, Note II, « Atti Accad. Naz. dei Lincei, Classe di Sc. Fis., Mat. e Nat. », *42* 195–201 (1967).

[9] SEGRE B., *Some Prop?rties of Differentiable Varieties and Transformations* (Berlin, Springer, 1957).