Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Vergara Caffarelli

Disequazioni variazionali per due superfici di curvatura media costante

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.1, p. 22–24.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_1_22_0>

Analisi matematica. — *Disequazioni variazionali per due superfici di curvatura media costante.* Nota di GIORGIO VERGARA CAFFARELLI, presentata (*) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — We state an existence and regularity theorem for the variational inequality associated with the problem of two soap films pushed each against the other with constant pressure.

§ 1. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$. Assegnate due costanti Λ_1, Λ_2 in questa Nota consideriamo il problema di minimizzare il funzionale

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega \left[\sqrt{1 + |u_x|^2} + \sqrt{1 + |v_x|^2} - n\Lambda_1 u - n\Lambda_2 v\right] dx \tag{1.1}$$

in una classe di funzioni che assumono valori prescritti su $\partial\Omega$ e verificano la condizione

$$u \geq v \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}\ ^{(1)}.$$

Questo problema conduce ad una disequazione variazionale ([6]) e tale sarà il nostro punto di vista. Come è noto minimizzare (1.1) corrisponde al problema di trovare la posizione di equilibrio di due bolle di sapone fissate rispettivamente al bordo e spinte l'una contro l'altra con pressione costante. Un problema di questo tipo, associato ad una coppia di operatori lineari ellittici aventi parte dominante uguale, è stato considerato nella Nota ([7]).

Per spiegare più precisamente il problema introduciamo alcune notazioni. Indicheremo con $C^{m,\lambda}(\Omega)$, $m \geq 0$, $0 \leq \lambda < 1$, $H^{m,q}(\Omega)$, $H_0^{m,q}$, $m \geq 0$, $1 \leq q < +\infty$ gli usuali spazi funzionali e con $H^{m,\infty}(\Omega)$ la classe delle funzioni le cui derivate $(m-1)$–esime sono lipschitziane in $\overline{\Omega}$. Inoltre se $\varphi \in H^{1,q}(\Omega)$ indicheremo con $H_\varphi^{1,q}(\Omega)$ la varietà

$$H_\varphi^{1,q}(\Omega) = \{\psi \in H^{1,q}(\Omega) : \psi - \varphi \in H_0^{1,q}(\Omega)\}.$$

Siano ρ, σ funzioni lipschitziane definite in $\overline{\Omega}$ tali che $\rho \geq \sigma$ su $\partial\Omega$. Detto $\mathbf{K}$ il convesso

$$\mathbf{K} = \{(\xi, \eta) \in H_\rho^{1,\infty} \times H_\sigma^{1,\infty} : \xi \geq \eta \quad \text{in} \quad \Omega\}$$

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1973.

(1) Tale argomento mi è stato indicato dal prof. G. Stampacchia che ringrazio del suggerimento.

minimizzare il funzionale (1.1) è equivalente al

PROBLEMA 1.1. *Determinare* $(u, v) \in \mathbf{K}$ *tali che per ogni* $(\xi, \eta) \in \mathbf{K}$ *si abbia*

$$\int_\Omega [a_i(u_x)(\xi - u)_{x_i} + a_j(v_x)(\eta - v)_{x_j}]\,dx \geq n \int_\Omega [\Lambda_1(\xi - u) + \Lambda_2(\eta - v)]\,dx \tag{1.2}$$

ove

$$a_i(p) = \frac{p_i}{\sqrt{1 + |p|^2}}.$$

In (1.2) si sottintendono le somme sugli indici $i, j = (1, 2, \cdots, n)$ ripetuti.

§ 2. Per tale problema si prova l'esistenza di una soluzione se Λ_1, Λ_2 e la curvatura media $H(y)$ di $\partial\Omega$ rispetto alla normale interna soddisfano in ogni punto $y \in \partial\Omega$ una condizione del tutto analoga a quella necessaria per la risolubilità del problema di Dirichlet per le superfici aventi curvatura media costante [5].

Precisamente si ha il

TEOREMA 2.1. *Se* $\partial\Omega \in C^3$, $\rho, \sigma \in C^3(\bar\Omega)$ *e la curvatura media* $H(y)$ *di* $\partial\Omega$ *a* y *soddisfa la condizione*

$$H(y) \geq \frac{n}{n-1} \max(|\Lambda_1|, |\Lambda_2|) \qquad y \in \partial\Omega$$

esiste una ed una sola soluzione u, v *del problema* (1.1). *Inoltre*

$$u, v \in H^{2,q}(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar\Omega) \quad , \quad 1 \leq q < +\infty \quad , \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

La soluzione (u, v) si ottiene come limite di soluzioni di opportuni problemi approssimanti. Precisamente detta $\theta^{(m)}(t)$ una funzione $C^\infty(\mathbf{R})$ tale che $0 \leq \theta^{(m)} \leq 1$, $(\theta^{(m)})' \leq 0$ e

$$\theta^{(m)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \leq -\frac{1}{m} \\ 0 & \text{per } t \geq -\frac{1}{2m} \end{cases}$$

si considera il problema di Dirichlet: $(u^{(m)}, v^{(m)}) \in H^1_\rho(\Omega) \times H^1_\sigma(\Omega)$:

$$\int_\Omega [a_i^{(m)}(u_x^{(m)})\,\varphi_{x_i} + a_j^{(m)}(v_x^{(m)})\,\psi_{x_j} + \frac{n}{2}\min(\Lambda_1 - \Lambda_2, 0)\,\theta^{(m)}(u^{(m)} - v^{(m)})\,(\varphi - \psi)\,dx$$
$$= n \int_\Omega [\Lambda_1 \varphi + \Lambda_2 \psi]\,dx \qquad \forall \varphi, \psi \in H^1_0(\Omega)$$

ove

$$a_i^{(m)}(p) = \frac{p_i}{\sqrt{1 + |p|^2}} + \frac{1}{m} p_i \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

ottenuto effettuando una regolarizzazione ellittica dell'operatore delle superfici minime ed utilizzando la tecnica di approssimazione per le soluzioni di una disequazione variazionale con ostacolo introdotta da Lewy e Stampacchia ([2], [3]).

Si dimostra che tali soluzioni approssimanti hanno il massimo uniformemente limitato in $\bar{\Omega}$ ed il gradiente uniformemente limitato su $\partial\Omega$ mediante l'uso di barriere globali del tipo considerato da Serrin [5]. A tal fine si utilizza il

LEMMA 2.1. *Se* $\mathrm{H} \geq \frac{n}{n-1} \max(|\Lambda_1|, |\Lambda_2|)$ *allora*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^{(m)}(u_x^{(m)}) \right| \leq (n-1)\,\mathrm{H}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^{(m)}(v_x^{(m)}) \right| \leq (n-1)\,\mathrm{H}\,.$$

La stima del gradiente è estesa all'interno di Ω con l'aiuto di un argomento originariamente dovuto a Radò [4] ed applicato alle disequazioni variazionali da Hartman e Stampacchia [1]. Questa tecnica permette di eliminare le difficoltà causate dalle interazioni delle due funzioni $u^{(m)}$ e $v^{(m)}$.

Detto I l'insieme di contatto, $\mathrm{I} = \{x \in \Omega : u(x) = v(x)\}$, si dimostra che $u, v \in \mathrm{C}^\infty(\Omega \setminus \mathrm{I}) \cap \mathrm{H}^{2,p}(\Omega)$ definiscono su Ω due superfici la cui curvatura media è individuata dalle equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u_x) = -n\Lambda_1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v_x) = -n\Lambda_2 \qquad \text{in} \quad \Omega \setminus \mathrm{I}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u_x) = \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v_x) = -n\,\frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} \qquad \text{quasi ovunque in} \quad \mathrm{I}\,.$$

Infine si dimostra che $\Omega \setminus \mathrm{I}$ è connesso ogni qual volta Ω è semplicemente connesso.

Le dimostrazioni complete dei risultati enunciati in questa Nota sono oggetto di un lavoro che sarà pubblicato nell'Archive for Rational Mechanics and Analysis.

BIBLIOGRAFIA

[1] HARTMAN P. e STAMPACCHIA G., *On some non-linear elliptic differential functional equations*, «Acta Math.», *115* (1966).

[2] LEWY H. e STAMPACCHIA G., *On the regularity of the solution of a variational inequality*, «Comm. Pure Appl. Math.», *22* (1969).

[3] LEWY H. e STAMPACCHIA G., *On the existence and smoothness of solutions of some non coercitive variational inequalities*, «Arch. Rat. Mech. and Anal.», *41* (4) (1971).

[4] RADÒ T., *On the problem of Plateau*. Ergeb. der Mat. Springer–Verlag–Berlin (1933).

[5] SERRIN J., *The problem of Dirichlet for quasi-linear elliptic differential equations with many independent variables*, «Phil. Trans. Royal Soc.», London A264 (1969).

[6] STAMPACCHIA G., *Variational Inequalities*. Published in Theory and applications of monotone operators. Ghizzetti (editor) Oderisi–Gubbio (1969).

[7] VERGARA CAFFARELLI G., *Regolarità di un problema di disequazioni variazionali relativo a due membrane*, «Rend. Acc. Lincei», *50* (1971).