
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LUIGI MONTEFUSCO

**Studio di un dispositivo atto a variare le condizioni
di risonanza di un canale di laboratorio**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 53 (1972), n.6, p. 554–563.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_6_554_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_6_554_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Studio di un dispositivo atto a variare le condizioni di risonanza di un canale di laboratorio* (*). Nota di LUIGI MONTEFUSCO, presentata (**) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — The possibility is studied of changing the resonance frequencies of a prismatic laboratory channel through an artificial surface tension on part of its length.

Expressions for the modified resonance frequencies are obtained.

1. PREMESSA

In un canale di laboratorio parallelepipedo, di lunghezza L , usato per esperienze su fenomeni ondosi, la successione delle pulsazioni di risonanza per una certa profondità H risulta univocamente determinata dalla nota relazione:

$$(1) \quad \omega_{rk}^2 = gk \frac{\pi}{L} \operatorname{Th} k \frac{\pi}{L} H \quad k = 1, 2, \dots, n \dots$$

In alcuni casi può interessare che la successione dei valori delle pulsazioni di risonanza risulti diversa da quella fornita dalla (1).

Anche nel caso in cui si esamini il comportamento di onde progressive di diverso periodo può essere importante, per un corretto funzionamento dello smorzatore necessariamente presente alla fine del canale, variare secondo una legge opportuna i valori delle frequenze di risonanza del canale stesso [1].

All'uopo si potrebbe, agevolmente ma in un campo necessariamente limitato, variare H , o, meno agevolmente, variare L .

Nella maggior parte dei casi però il valore di H è assegnato, e quando sia necessario variare spesso la frequenza di risonanza risulta poco pratico il provvedimento di variare L .

Si mostra qui che è possibile realizzare una variazione della pulsazione di risonanza del canale, lasciando invariati i valori di H e di L , mediante l'impiego di un dispositivo che in una zona limitata del canale stesso, ad esempio in prossimità del battente, mantenga il pelo libero (che ovviamente può risultare ivi non più « libero ») ad una pressione diversa dall'atmosferica e proporzionale alla curvatura del pelo libero stesso. Un tale dispositivo si può ad ogni effetto riguardare come una diversa tensione superficiale del liquido in quel tratto di canale. Una sua rozza realizzazione può essere semplicemente costituita da un telo non infinitamente flessibile che galleggi (ancorato al battente) sull'acqua per un certo tratto di canale. Oppure il telo potrebbe essere sostituito da una serie di listelli trasversali, affiancati ma indipendenti, di materiale più leggero dell'acqua collegati da strisce longitudinali

(*) Ricerca condotta sotto gli auspici del Gruppo per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1972.

della desiderata rigidezza (o aventi rigidezza regolabile). Senza entrare, in questa sede, in ulteriori dettagli è evidentemente possibile immaginare soluzioni pratiche di tale dispositivo più o meno sofisticate, sufficientemente aderenti alla schematizzazione qui fattane, ed eventualmente in grado di variare con semplicità la costante di proporzionalità fra pressione esercitata e curvatura del pelo libero.

Si conduce qui lo studio teorico di questo dispositivo in una schematica canaletta di laboratorio. Questa sia a fondo orizzontale e limitata lateralmente da pareti verticali, sia inoltre chiusa ad una estremità da un battente piano incernierato al fondo, all'altra da una parete verticale.

La presenza del battente non influenza, almeno nell'ambito della prima approssimazione, la successione dei valori delle frequenze di risonanza.

Ciononostante si è ritenuto opportuno mantenerlo nello schema adottato in quanto non introduce ulteriori complicazioni analitiche e la soluzione che così si ottiene fornisce informazioni (nell'ambito della teoria lineare) sul moto ondoso presente nel canale fuori dalle condizioni di risonanza nel caso limite che la tensione superficiale (eventualmente reale e non fittizia) agisca su tutto il pelo libero.

2. SCHEMA MATEMATICO E IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA

Si studia una situazione di regime e si ritiene pertanto esaurito ogni fenomeno transitorio.

Lo schema adottato è quello di moto laminare piano di liquido perfetto ed incomprimibile.

Il sistema di riferimento x, y (cartesiano ortogonale) adottato è indicato in fig. 1.

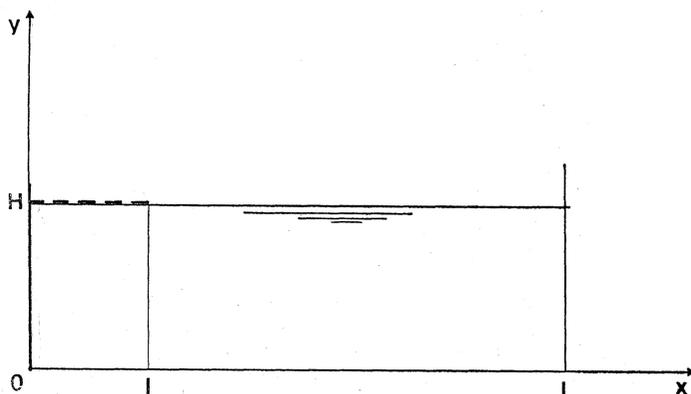


Fig. 1.

Con H si indica la quota del pelo libero di riposo. In $x = 0$ si trova il battente generatore di onde e nel tratto compreso fra 0 ed l agisce il dispositivo in questione.

Il battente, rigido ed incernierato al fondo, è supposto in moto alternativo periodico sinusoidale.

Sotto le ipotesi esposte, il fenomeno è governato dalle equazioni di Eulero:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \end{array} \right.$$

insieme con l'equazione di continuità:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

e con le opportune condizioni al contorno.

Con u e v si sono indicate le componenti orizzontale e verticale della velocità, con p la pressione e con ρ la densità del liquido.

Adottando il metodo delle approssimazioni successive di Poincaré, e limitando l'indagine al primo ordine di approssimazione (l'attenzione viene rivolta alla determinazione delle frequenze di risonanza), le (2) si riducono alle:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \end{array} \right.$$

mentre la (3) rimane formalmente invariata, convenendo però di indicare d'ora in avanti con p, u, v i termini del primo ordine della pressione e delle componenti orizzontale e verticale della velocità.

Alle equazioni (3) e (4) vanno associate le condizioni al contorno, anch'esse in forma linearizzata. Con l'ulteriore ipotesi di considerare nulla la tensione superficiale propria del liquido, queste si scrivono:

$$(5) \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad u = \alpha_0 \omega y \cos \omega t$$

$$(6) \quad x = L \quad 0 \leq y \leq H \quad u = 0$$

$$(7) \quad y = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad v = 0$$

$$(8) \quad y = H \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq l \quad p = -\tau \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ l \leq x \leq L \quad p = 0 \end{array} \right.$$

essendo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ con } T \text{ periodo del moto del battente;}$$

α_0 = massima escursione angolare del battente (rispetto alla posizione verticale);

τ = tensione superficiale fittizia nella zona $0-l$;

$\eta(x, t)$ = equazione del pelo libero, la cui forma, a priori incognita, è determinata dalla condizione cinematica (linearizzata):

$$(9) \quad \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} - v \right]_{y=H} = 0.$$

Lo schema assunto consente di introdurre la funzione $\varphi(x, y, t)$ potenziale della velocità:

$$(10) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$(11) \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

La (3) si trasforma quindi nella:

$$(12) \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

mentre le (4) forniscono per la pressione l'espressione:

$$(13) \quad p(x, y, t) = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g y + \text{costante}$$

La soluzione è dunque la funzione armonica che verifica le seguenti condizioni al contorno:

$$(14) \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha_0 \omega y \cos \omega t$$

$$(15) \quad x = L \quad 0 \leq y \leq H \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$(16) \quad y = 0 \quad 0 \leq x < L \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$(17) \quad y = H \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq l \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2} \\ l \leq x \leq L \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

È utile ricorrere, per maggior compattezza delle espressioni risultanti, ad una funzione $\varphi(x, y, t)$ complessa, convenendo che significato fisico sia assegnato solo alla parte reale di tutte le espressioni delle grandezze fisiche in gioco.

La condizione (14) si può così scrivere:

$$(14') \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha_0 \omega y e^{i\omega t}.$$

Se si assume che la funzione $\varphi(x, y, t)$ abbia la forma:

$$(18) \quad \varphi(x, y, t) = \Psi(x, y) e^{i\omega t}$$

il problema è ricondotto alla determinazione della funzione $\Psi(x, y)$ che soddisfa l'equazione:

$$(19) \quad \nabla^2 \Psi = 0$$

e le condizioni al contorno:

$$(20) \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \alpha_0 \omega y$$

$$(21) \quad x = L \quad 0 \leq y \leq H \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

$$(22) \quad y = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

$$(23) \quad y = H \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq l \\ l \leq x \leq L \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} -\omega^2 \Psi + g \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y \partial x^2} \\ -\omega^2 \Psi + g \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \end{array}$$

3. SOLUZIONE

Si ricerca una soluzione del tipo:

$$(24) \quad \Psi(x, y) = \sum_k f_k(x) \cos k \frac{\pi}{H} y + \sum_k g_k(y) \cos k \frac{\pi}{L} (x - L).$$

La forma delle f_k e g_k risulta determinata dalla (19), e si ha immediatamente:

$$(25) \quad \Psi(x, y) = \sum_k A_k \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{H} (x - L) \cos k \frac{\pi}{H} y + \\ + \sum_k B_k \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{L} y \cos k \frac{\pi}{L} (x - L).$$

Le condizioni (21) e (22) risultano sempre verificate dalla Ψ espressa dalla (25). La soluzione che si ottiene dalla (25) è determinata a meno di un sistema arbitrario di onde stazionarie per pulsazioni uguali a quelle di risonanza per il canale in esame. La determinazione di tali pulsazioni di risonanza è però indipendente da questo sistema di onde stazionarie, ed è ottenibile dalla (25).

Fuori dalle condizioni di risonanza la (25) fornisce invece la soluzione completa del problema.

Imponendo la condizione (20) risulta:

$$(26) \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{x=0} = \sum_k \left[A_k k \frac{\pi}{H} \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{H} (-L) \right] \cos k \frac{\pi}{H} y = \alpha_0 \omega y.$$

Poiché le funzioni $\cos k \frac{\pi}{H} y$ costituiscono, per $k = 0, 1, 2, \dots$, un sistema ortogonale completo nell'intervallo $(0, H)$, il termine fra parentesi quadra della (26) rappresenta il generico coefficiente dello sviluppo della funzione di y a secondo membro in serie di funzioni $\cos k \frac{\pi}{H} y$.

Risulta cioè:

$$(27) \quad -A_k k \frac{\pi}{H} \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{H} L = \frac{\int_0^H \alpha_0 \omega y \cos k \frac{\pi}{H} y dy}{\int_0^H \cos^2 k \frac{\pi}{H} y dy}$$

e da questa si ha immediatamente

$$(28) \quad A_k = \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ \frac{4 \alpha_0 \omega H^2}{k^3 \pi^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sh} k \frac{\pi}{H} L} & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

I coefficienti B_k della (25) si ottengono imponendo la condizione espressa dalla (23).

Allo scopo indico con $R(x)$ e $S(x)$ le due seguenti funzioni:

$$(29) \quad R(x) = \left[-\omega^2 \Psi' + g \frac{\partial \Psi'}{\partial y} \right]_{y=H}$$

$$(30) \quad S(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \text{ compreso nell'intervallo } (l, L) \\ \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{\partial^3 \Psi'}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=H} & \text{per } x \text{ compreso nell'intervallo } (0, l). \end{cases}$$

Tenuto conto della (25) queste si scrivono:

$$(31) \quad R(x) = -\omega^2 \sum_k (-1)^k A_k \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{H} (x-L) - \\ -\omega^2 \sum_k B_k \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{L} H \cos k \frac{\pi}{L} (x-L) + \\ + g \sum_k B_k k \frac{\pi}{L} \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H \cos k \frac{\pi}{L} (x-L)$$

$$(32) \quad S(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \text{ compreso in } (l, L) \\ -\frac{\tau}{\rho} \sum_k B_k \left(k \frac{\pi}{L} \right)^3 \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H \cos k \frac{\pi}{L} (x-L) & \text{per } x \text{ compreso in } (0, l). \end{cases}$$

È utile osservare che il sistema costituito dalle funzioni $\cos k \frac{\pi}{L} (x-L)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, è ortogonale e completo nell'intervallo $(0, L)$.

Sviluppo quindi le funzioni $R(x)$ ed $S(x)$ in serie di funzioni $\cos k \frac{\pi}{L} (x-L)$. Detto:

$$(33) \quad \delta_{nk} = \frac{\int_0^L \operatorname{Ch} n \frac{\pi}{H} (x-L) \cos k \frac{\pi}{L} (x-L) dx}{\int_0^L \cos^2 k \frac{\pi}{L} (x-L) dx}$$

cioè

$$(34) \quad \delta_{nk} = -\frac{2}{L} (-1)^k \frac{n \frac{\pi}{H}}{\left(n \frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(k \frac{\pi}{L}\right)^2} \operatorname{Sh} n \frac{\pi}{H} L$$

risulta:

$$(36) \quad R(x) = \sum_k \left\{ -\omega^2 \sum_n (-1)^n A_n \delta_{nk} - \right. \\ \left. - \omega^2 B_k \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{L} H + g B_k k \frac{\pi}{L} \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H \right\} \cdot \\ \cdot \cos k \frac{\pi}{L} (x - L).$$

Inoltre, detto:

$$(37) \quad \varepsilon_{nk} = \frac{\int_0^l \cos n \frac{\pi}{L} (x-L) \cos k \frac{\pi}{L} (x-L) dx}{\int_0^L \cos^2 k \frac{\pi}{L} (x-L) dx}$$

cioè

$$(38) \quad \varepsilon_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \left[(n-k) \frac{\pi}{L} (l-L) \right]}{n-k} + \frac{\sin \left[(n+k) \frac{\pi}{L} (l-L) \right]}{n+k} \right\} & \text{per } k \neq n \\ \frac{l}{L} + \frac{1}{2k\pi} \sin 2k \frac{\pi}{L} (l-L) & \text{per } k = n \end{cases}$$

si può scrivere

$$(39) \quad S(x) = \sum_k \left\{ -\frac{\tau}{\rho} \sum_n B_n \left(n \frac{\pi}{L} \right)^3 \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H \varepsilon_{nk} \right\} \cdot \cos k \frac{\pi}{L} (x - L).$$

Perché risulti soddisfatta la condizione (23) debbono quindi risultare uguali le quantità fra parentesi graffa delle (36) e (39). Deve cioè essere:

$$(40) \quad -\omega^2 \sum_n (-1)^n A_n \delta_{nk} + B_k \left[g k \frac{\pi}{L} \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H - \omega^2 \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{L} H \right] = \\ = -\frac{\tau}{\rho} \sum_n B_n \left(n \frac{\pi}{L} \right)^3 \operatorname{Sh} n \frac{\pi}{L} H \varepsilon_{nk}.$$

La (40) rappresenta un sistema di infinite equazioni nelle infinite incognite B_k . La determinazione delle frequenze di risonanza non richiede però la soluzione di tale sistema. Osserviamo che si può scrivere:

$$(41) \quad B_k \left[g k \frac{\pi}{L} \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H - \omega^2 \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{L} H + \frac{\tau}{\rho} \left(k \frac{\pi}{L} \right)^3 \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H \varepsilon_{kk} \right] = \\ = \omega^2 \sum_n (-1)^n A_n \delta_{nk} - \frac{\tau}{\rho} \sum_{n \neq k} B_n \left(n \frac{\pi}{L} \right)^3 \operatorname{Sh} n \frac{\pi}{L} H \varepsilon_{nk}$$

cioè

$$(42) \quad B_k = \frac{\omega^2 \sum_n (-1)^n A_n \delta_{nk} - \frac{\tau}{\rho} \sum_{n \neq k} B_n \left(n \frac{\pi}{L} \right)^3 \operatorname{Sh} n \frac{\pi}{L} H \varepsilon_{nk}}{g k \frac{\pi}{L} \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H + \frac{\tau}{\rho} \left(k \frac{\pi}{L} \right)^3 \operatorname{Sh} k \frac{\pi}{L} H \cdot \varepsilon_{kk} - \omega^2 \operatorname{Ch} k \frac{\pi}{L} H}$$

I valori della successione delle pulsazioni di risonanza sono quelli che annullano il denominatore della (42). Questi sono quindi determinati dall'equazione:

$$(43) \quad \bar{\omega}_{rk}^2 = k \frac{\pi}{L} \operatorname{Th} k \frac{\pi}{L} H \left\{ g + \frac{\tau}{\rho} \left(k \frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot \varepsilon_{kk} \right\}.$$

La (43) è formalmente identica alla (1), solo che al posto dell'accelerazione di gravità compare la quantità

$$(44) \quad \bar{g}_k = g + \frac{\tau}{2\rho} k \frac{\pi}{L^2} \left[2 k \frac{\pi}{L} l + \sin 2 k \frac{\pi}{L} l \right].$$

4. CALCOLI NUMERICI E CONCLUSIONI

Allo scopo di rendere di immediata utilizzazione il risultato ottenuto si è costruito il grafico di fig. 2.

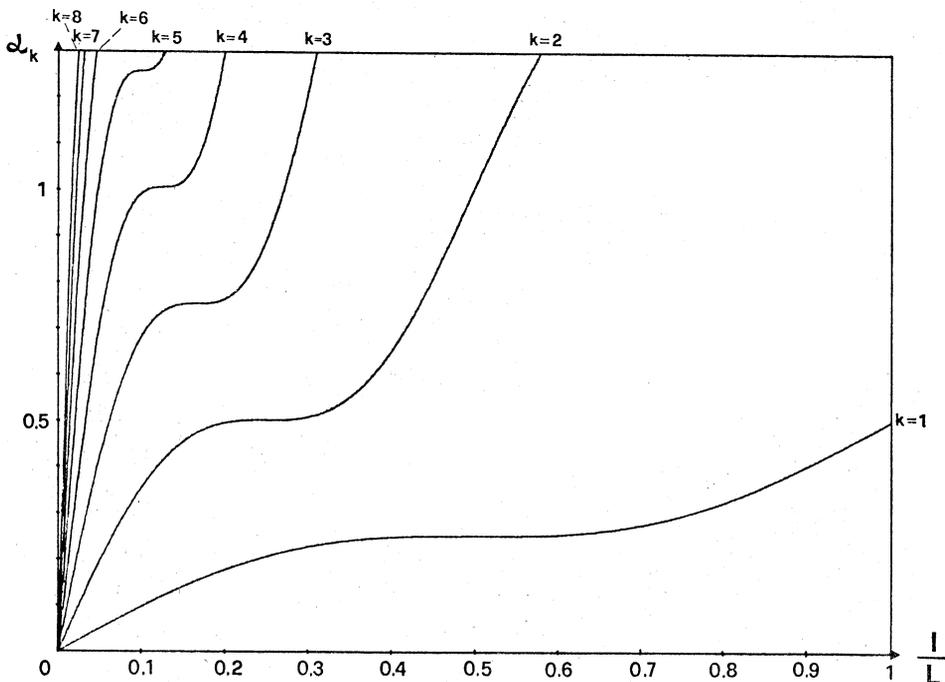


Fig. 2.

Posto infatti:

$$(45) \quad \alpha_k \left(\frac{l}{L} \right) = k \frac{\pi}{4g} \left[2k \frac{\pi}{L} l + \sin 2k \frac{\pi}{L} l \right]$$

risulta:

$$(46) \quad \frac{\bar{\omega}_{rk}}{\omega_{rk}} = \sqrt{1 + 2\alpha_k \frac{\tau}{\rho L^2}}.$$

e, noto il valore di τ e ricavato dalla (45) (o, per i primi otto valori di k , dal corrispondente grafico riportato in fig. 2) il valore di α_k , la (46) fornisce immediatamente il valore della nuova pulsazione di risonanza.

Prima osservazione. - Nel caso particolare $l = L$ dalla (38) discende immediatamente

$$\varepsilon_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq k \\ 1 & \text{per } n = k \end{cases}$$

e pertanto dalla (42) si ricava:

$$(47) \quad B_k = \frac{\omega^2 \sum_n (-1)^n A_n \delta_{nk}}{gk \frac{\pi}{L} \text{Sh } k \frac{\pi}{L} H + \frac{\tau}{\rho} \left(k \frac{\pi}{L} \right)^3 \text{Sh } k \frac{\pi}{L} H - \omega^2 \text{Ch } k \frac{\pi}{L} H}$$

e risulta pertanto completamente determinata la (25).

Seconda osservazione. - È evidente che il metodo qui impiegato consente di esaminare il comportamento di dispositivi analoghi, ma non identici, a quello schematizzato.

Per esempio si può pensare, invece che ad una pressione proporzionale alla curvatura, ad una pressione proporzionale alla variazione di quota del pelo libero (rispetto alla condizione di riposo), su un tratto limitato del canale o, eventualmente, per tutta la lunghezza del canale.

Basta in tal caso, detta σ la nuova costante di proporzionalità, sostituire alla (8) la:

$$(48) \quad y = H \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq l & p = \sigma \eta \\ l \leq x \leq L & p = 0 \end{cases}$$

e procedere nella medesima maniera.

O anche si può pensare che un dispositivo reale presenti entrambe queste caratteristiche, e le condizioni al pelo libero saranno una combinazione delle (8) e (48).

Come pure è immediato ottenere la soluzione nel caso in cui il battente considerato sia sostituito da un altro qualunque battente, anche non rigido, che segua però un moto periodico.

La successione delle frequenze di risonanza è però, come già detto, indipendente dalla presenza e dal tipo di battente nell'ambito della prima approssimazione.

Si può infine osservare che non è difficile estendere il risultato al caso in cui si voglia tener conto anche della tensione superficiale propria del liquido.

BIBLIOGRAFIA

L. MONTEFUSCO, *Studio teorico di uno smorzatore di onde progressive*. In corso di stampa in:
«Atti della Accademia delle Scienze di Bologna».