Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Clifford Truesdell

Sul rendimento delle macchine termiche omogenee

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.6, p. 549–553.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_6_549_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Termodinamica. — *Sul rendimento delle macchine termiche omogenee* (*). Nota (**) del Socio Straniero CLIFFORD TRUESDELL.

SUMMARY. — A general inequality for the efficiency of a homogeneous heat engine is derived. From it, by use of constitutive relations, follow cases in which the classical Carnot–Clausius–Kelvin estimate holds, is too weak, or fails.

Sebbene in ogni libro di termodinamica si trovi una giustificazione di carattere fisico della celebre e classica limitazione per il rendimento di una macchina termica omogenea, cioè

$$e_B \leqq 1 - \theta_{min}/\theta_{max} ,$$

una dimostrazione rigorosa, coerente ad assiomi accettabili per le scienze matematiche, sembra finora mancare. Infatti i classici ragionamenti di tipo fisico non sono esposti in forma altrettanto logica, poiché lasciano solo intuire quei taciti assiomi costitutivi, che soli bastano ad assicurare la validità della classica limitazione.

Oggetto della presente Nota è di chiarire la struttura logica del calcolo del rendimento delle macchine termiche. Gli assiomi generali sono quelli della moderna termomeccanica razionale nel caso speciale di un processo omogeneo [1], cioè un processo nel quale ogni variabile costitutiva si riduce ad una funzione del solo tempo t. Su questa base si erigono poi le varie teorie costitutive che debbono precisare certe classi di corpi termodinamici. Il rendimento e_B di una macchina omogenea, il cui corpo lavorante è il corpo B, dipende non solo dalla scelta del corpo ma anche dal processo al quale il corpo è sottoposto.

In questa Nota mi limito alla semplice enunciazione degli assiomi, delle definizioni, e dei teoremi principali. Le dimostrazioni verranno pubblicate altrove.

Notazioni. Ogni lettera denota o un numero reale o una funzione reale del solo tempo t. Per un certo corpo B ed un certo intervallo reale $T = [t_1, t_2]$ siano

- θ la temperatura assoluta, $0 < \theta_{min} \leqq \theta(t) \leqq \theta_{max} \leqq \infty$,
- E l'energia interna;
- Q la quantità di calore nell'unità di tempo;
- W la potenza ridotta ($= P - \dot{K}$, essendo P la potenza delle forze meccaniche e K l'energia cinetica);
- H il calorico («l'entropia»).

Un punto sovrapposto al simbolo di una funzione denota la derivata.

(*) Lavoro eseguito con il contributo di un finanziamento della U.S. National Science Foundation alla Johns Hopkins University.

(**) Presentata nella seduta del 9 dicembre 1972.

(1) Cfr. il primo capitolo del mio libro *Rational Thermodynamics*, New York ecc., McGraw-Hill, 1969.

ASSIOMA 1 (*Conservazione dell'energia*).

$$\dot{E} = W + Q\,.$$

ASSIOMA 2 (*Diseguaglianza di Clausius*).

$$\theta\dot{H} \geqq Q\,.$$

Sia T^+ il sottoinsieme di T nel quale $Q > 0$, e sia T^- quello in cui $Q < 0$.

DEFINIZIONI AUSILIARIE.

$$U \equiv -\int_T W\mathrm{d}t = \text{lavoro ridotto compiuto da B in T.}$$

$$C^+ \equiv \int_{T^+} Q\mathrm{d}t = \text{calore assorbito in T.}$$

$$C^- \equiv -\int_{T^-} Q\mathrm{d}t = \text{calore emesso in T.}$$

$$\Delta E \equiv E(t_2) - E(t_1) = \text{incremento della energia interna in T.}$$

$$\Delta H \equiv H(t_2) - H(t_1) = \text{incremento del calorico in T.}$$

DEFINIZIONE PRINCIPALE.

$$e_B \equiv \frac{U}{C^+} = \text{rendimento di B in T.}$$

LEMMA.

$$\int_{T^+} \frac{Q}{\theta}\,\mathrm{d}t \geqq \frac{C^+}{\theta_{max}} \quad , \quad -\int_{T^-} \frac{Q}{\theta}\,\mathrm{d}t \leqq \frac{C^-}{\theta_{min}}\,.$$

TEOREMA 1 (*Diseguaglianza principale*).

$$e_B \leqq 1 - \frac{\theta_{min}}{\theta_{max}} - \frac{\Delta E - \theta_{min}\,\Delta H}{C^+}\,.$$

COROLLARIO (*Rendimento classico*). *Se*

$$\Delta E - \theta_{min}\,\Delta H \geqq 0\,,$$

allora

$$e_B \leqq 1 - \frac{\theta_{min}}{\theta_{max}} < 1\,.$$

Notazione. Sia f^t la storia della funzione f fino all'istante t:

$$f^t(s) \equiv f(t-s)\;, \qquad 0 \leqq s < \infty \quad , \quad t \in T\,.$$

Sia $\Upsilon(t)$ un certo vettore k–dimensionale. Ad esempio, la componente $\Upsilon_1(t)$ potrebbe essere il volume del corpo.

DEFINIZIONE. Una coppia di funzioni θ, Υ è un processo.

ASSIOMA 3 (*Principio di determinismo* (2)). *Dato il corpo* B, *esistono applicazioni* **E**, **W**, **Q**, **H** *tali che per una data classe di processi* θ, Υ *e per ogni* $t \in T$, *siano*

$$E = \mathbf{E}(\theta^t, \Upsilon^t),$$

$$W = \mathbf{W}(\theta^t, \Upsilon^t),$$

$$Q = \mathbf{Q}(\theta^t, \Upsilon^t),$$

$$H = \mathbf{H}(\theta^t, \Upsilon^t),$$

e ammettiamo che queste applicazioni **E**, **W**, **Q**, **H** *siano tali da soddisfare i due Assiomi 1 e 2 per ogni processo.*

Caso speciale (le cosiddette equazioni di stato):

$$E(t) = \boldsymbol{e}(\theta(t), \Upsilon(t)),$$

$$H(t) = \boldsymbol{h}(\theta(t), \Upsilon(t)).$$

DEFINIZIONE. Il processo θ, Υ è un ciclo se

$$\theta(t_1) = \theta(t_2) \quad , \quad \Upsilon(t_1) = \Upsilon(t_2).$$

COROLLARIO. *Se valgono equazioni di stato per il corpo* B, *allora per ogni ciclo vale la classica limitazione del rendimento.*

COROLLARIO. *Se il materiale del corpo è dotato di memoria evanescente nel senso di Coleman e Noll* (3), *la classica limitazione vale in ogni ciclo tale che siano*

$$\theta^{t_1} = \text{cost.} \quad , \quad \Upsilon^{t_1} = \text{cost.} \quad , \quad \theta(t_1) = \theta_{\min}.$$

DEFINIZIONI AUSILIARIE. Se $\theta = \text{cost.}$, il processo è isotermo in T. Per un dato corpo B, un processo in T è

$$\left.\begin{array}{l}\text{adiabatico}\\ \text{isocalorico}\end{array}\right\} \text{ se sempre } \left\{\begin{array}{l} Q = 0 \\ H = \text{cost.}\end{array}\right.$$

(2) Per le deduzioni che seguono da questo assioma – deduzioni che adopero senza precisarle negli esempi presentati alla fine di questa Nota – vedi ancora il primo capitolo del mio libro citato nel richiamo precedente.

(3) Vedi ad esempio il Teorema 2 del terzo capitolo del mio libro.

DEFINIZIONE (Processi e cicli di Carnot). Se vale quasi sempre in T una delle seguenti alternative:

$$
\begin{aligned}
&Q(t) = 0\,, && \text{oppure} \\
&Q(t) > 0 && \text{e} \quad \theta = \theta_{\max}\,, \quad \text{oppure} \\
&Q(t) < 0 && \text{e} \quad \theta = \theta_{\min}\,,
\end{aligned}
$$

allora il processo è un processo di Carnot in T. Un ciclo che è un processo di Carnot è un ciclo di Carnot.

TEOREMA 2. *Siano date le temperature estreme* $\theta_{\min}$ *e* $\theta_{\max}$: $0 < \theta_{\min} < \theta_{\max} < \infty$. *Nella classe di processi tali che*

$$\Delta E = 0 \quad , \quad \Delta H \leqq 0\,,$$

vale sempre la limitazione

$$e_B \leqq 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}}\,.$$

Affinché sia

$$e_B = 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}}\,,$$

occorre e basta che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1) *Il processo è un processo di Carnot.*
2) $\theta\dot{H} = Q$ *quasi sempre.*

ESEMPIO 1 (caso classico). Nel caso che

$$
\begin{aligned}
E &= \boldsymbol{e}(\theta\,,\Upsilon)\,, \\
H &= \boldsymbol{h}(\theta\,,\Upsilon)\,, \\
W &= -\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{p}_j(\theta\,,\Upsilon)\,\dot{\Upsilon}_j\,,
\end{aligned}
$$

allora in ogni ciclo che non è un ciclo di Carnot

$$e_B < 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}}\,,$$

mentre in ogni ciclo di Carnot

$$e_B = 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}}\,.$$

ESEMPIO 2 (corpo con attrito lineare). Sia invece

$$
\begin{aligned}
E &= \boldsymbol{e}(\theta\,,\Upsilon)\,, \\
H &= \boldsymbol{h}(\theta\,,\Upsilon)\,, \\
W &= -\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{p}_j(\theta\,,\Upsilon)\,\dot{\Upsilon}_j - \sum_{j,k=1}^{k} \boldsymbol{p}_{ij}(\theta\,,\Upsilon)\,\dot{\Upsilon}_j\,\dot{\Upsilon}_i\,,
\end{aligned}
$$

ove la matrice $\|p_{ij}\|$ è definita negativa. Sia

$$L_f \equiv - \int_T \sum_{j,i=1}^{k} p_{ij}(\theta , \Upsilon)\, \dot{\Upsilon}_i \, \dot{\Upsilon}_j \, dt$$

il lavoro totale delle pressioni di attrito nell'intervallo T.

Allora in ogni ciclo non banale si ha $L_f > 0$ ed anche

$$e_B \leqq 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} \left(1 + \frac{L_f}{C^+}\right) < 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} .$$

ESEMPIO 3 (processi rallentati in un corpo con attrito). Sia θ , Υ un processo in $[0 , t_2]$ e definiamo, partendo da esso, una famiglia di processi rallentati θ_r , Υ_r come segue:

$$\theta_r(t) \equiv \theta(rt) \quad , \quad \Upsilon_r(t) \equiv \Upsilon(rt) ,$$

essendo r un numero positivo e $0 \leqq t \leqq t_2/r$. Necessariamente anche il processo rallentato non può raggiungere il rendimento $1 - \theta_{\min}/\theta_{\max}$. Si può però dimostrare che, nel caso che il processo sia un ciclo di Carnot, allora

$$\lim_{r \to 0} (e_B)_r = 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} .$$

Altri esempi costruiti dal prof. Day (4) fanno vedere che per un corpo di materiale con memoria è possibile aggiustare le storie θ^{t_1}, Υ^{t_1} in modo tale che

$$e_B > 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} ,$$

in un ciclo di Carnot in T.

(4) W. A. DAY, *The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 22, Springer-Verlag, New York ecc., 1972.