Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jörn Zeuge

Eine geometrische Kennzeichnung der Mannigfaltigkeiten von Segre und Veronese und eine damit zusammenhängende ausgezeichnete Transformation zwischen gewissen projektiven Räumen

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.6, p. 531–540.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_6_531_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Geometria. — *Eine geometrische Kennzeichnung der Mannigfaltigkeiten von Segre und Veronese und eine damit zusammenhängende ausgezeichnete Transformation zwischen gewissen projektiven Räumen.* Nota di JÖRN ZEUGE, presentata [(*)] dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Il presente lavoro concerne la ben nota varietà di Segre, prodotto di r spazi proiettivi, e la veronesiana V_n^r, modello proiettivo del sistema di tutte le ipersuperfici d'ordine r in P_n. Queste due varietà vengon qui definite sinteticamente col linguaggio moderno a mezzo di prodotti tensoriali di spazi vettoriali. Una notevole trasformazione dello spazio ambiente di V_n^r in quello di V_n^{r+1} viene poi definita, stabilendone le prime proprietà fondamentali.

Die Veronese-Mannigfaltigkeiten V_n^r stellen aus folgenden Gründen ausgezeichnete algebraische Mannigfaltigkeiten dar: 1) Sie sind rational und lassen sich sogar ohne Ausnahmen, d.h. bijektiv auf die Punkte eines n-dimensionalen projektiven Raumes P_n beziehen. Damit sind sie Modelle des P_n; sie spannen einen Raum der Dimension $\binom{n+r}{r} - 1$ auf, sind jedoch darin für $r > 1$ echte Teilmengen. Die «Geraden» in diesem Modell sind rationale Normkurven V_1^r. 2) Die Untergruppe derjenigen Projektivitäten des Umgebungsraumes $\langle V_n^r \rangle$, welche V_n^r in sich transformieren, ist isomorph zur Gruppe $PGL(P_n)$. Die projektiven Strukturen des P_n und $\langle V_n^r \rangle$ und damit auch diejenigen aller $\langle V_n^r \rangle$ $(r = 1, 2, \cdots)$ untereinander stehen also durchaus in enger Beziehung. Die in der folgenden Arbeit beschriebene sog. Φ-Transformation bildet die Teilräume von $\langle V_n^r \rangle$ in die Teilräume von $\langle V_n^{r+1} \rangle$ ab. Dabei ist die Beziehung zwischen den beiden Veronese-Mannigfaltigkeiten punktweise bijektiv; ebenso werden die Schmiegräume der V_n^r auf die entsprechenden Schmiegräume der V_n^{r+1} abgebildet. Es werden durch diese Transformation also die verschiedenen Veronese-Modelle des P_n aufeinander bezogen. Auch die projektive Gruppe der V_n^r wird dabei isomorph mittransformiert. Es gibt so die Φ-Transformation ein Mittel in die Hand, spezielle Untersuchungen nicht nur im «Grundraum» P_n durchzuführen, sondern gleichzeitig in den verschiedenen Veronese-Modellen. Dadurch lassen sich zahlreiche Sätze, insbesondere über algebraische Mannigfaltigkeiten, besonders elegant formulieren. Darauf soll noch in späteren Arbeiten näher eingegangen werden.

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1972.

0.1 Bezeichnungen

P_n $:=$ n–dimensionaler pappus'scher projektiver Raum;

$\overset{r}{\underset{i=1}{\times}} P_{n_i}$ $:=$ kartesisches Produkt der Räume $P^1_{n_1}, \cdots, P^r_{n_r}$;

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "///"] & & B \end{tikzcd}$$ $:=$ kommutatives Diagramm;

$\langle M \rangle$ $:=$ projektive Hülle von $M \subset P_n$;

$|M|$ $:=$ Anzahl der Elemente von M.

§ 1. Veronese–Mannigfaltigkeiten

1.0. Definition. *Um eine bequeme Bezeichnungsweise zu haben, werden die folgenden Hilfsabbildungen eingeführt*:

Es bezeichne Ψ *die Menge aller Abbildungen*

$\psi : \langle 1, 2, \cdots, r \rangle \to \langle 0, n_1, \cdots, n_r \rangle$ *mit*

a) $n_i \in \mathbf{N}$

b) $\psi(i) = \begin{cases} 0 & \textit{oder} \\ n_i & \end{cases}$

Es ist $\Psi_t := \{\psi \in \Psi$ *mit* $|\psi^{-1}(0)| = r - t\}$.

Streng genommen müsste $\psi = \Psi_{n_1, \cdots, n_r}$ bezeichnet werden. Die Indizes werden jedoch im folgenden fortgelassen, da keine Verweschlungsgefahr besteht.

1.1 Definition. *Sei* $\overset{r}{\underset{i=1}{\times}} P^i_{n_i}$ *ein multiprojektiver Raum über dem kommutativen Körper* K.

Ein projektiver Raum P über K heisst « *Tensorprodukt* » der Räume $P^1_n, \cdots, P^r_{n_r} \Longleftrightarrow$ Es gibt eine multiprojektive Abbildung

$$F : \overset{r}{\underset{i=1}{\times}} P^i_{n_i} \to P$$

mit der Eigenschaft:

Zu jedem projektiven Raum Q über K und zu jeder multiprojektiven Abbildung

$$f : \overset{r}{\underset{i=1}{\times}} P^i_{n_i} \to Q$$

gibt es genau eine lineare projektive Abbildung

$$f^* : P \to Q,$$

so dass $$f = f^* F$$ gilt.

Wir schreiben dann $P = \bigotimes_{i=1}^{r} P_{n_i}^{i}$

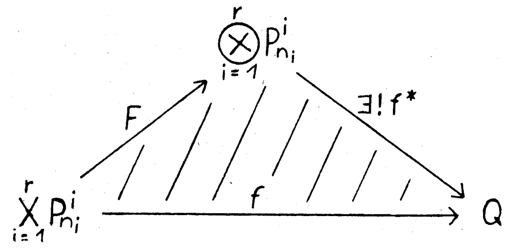

Diagramm 1.

1.2 ANMERKUNG. Dass ein solches projektives Tensorprodukt stets existiert, lässt sich leicht aus der Existenz des Tensorprodukts linearer Vektorräume herleiten.

Wenn V ein linearer Vektorraum über K ist, so bezeichne

$$\rho : \begin{cases} V \to P \\ V \to V/K^* \end{cases} \quad \text{die Restklassenabbildung,}$$

die V den projektiven Raum P zuordnet. Die Existenz von $\bigotimes_{i=1}^{r} P_{n_i}^{i}$ ergibt sich dann unmittelbar aus dem Diagramm 2.

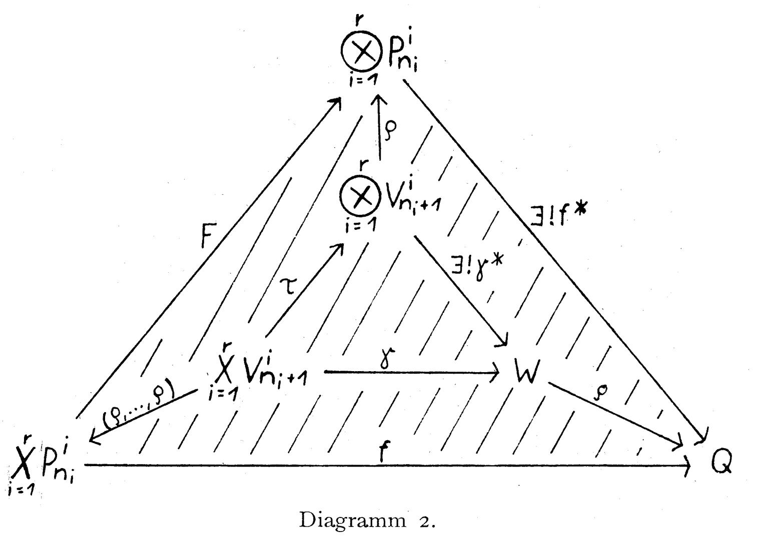

Diagramm 2.

1.3 SATZ. – *Die Abbildung* $F : \times_{i=1}^{r} P_{n_i}^{i} \to \bigotimes_{i=1}^{r} P_{n_i}^{i}$ *ist injektiv.*

Beweis: Angenommen, F sei nicht injektiv $\Rightarrow$ Es gibt

$$(P_0^1, \cdots, P_0^r) \neq (\overline{P_0^1}, \cdots, \overline{P_0^r}) \in \times_{i=1}^{r} P_{n_i}^{i} \quad \text{mit} \quad F(P_0^1, \cdots, P_0^r) = F(\overline{P_0^1}, \cdots, \overline{P_0^r}) .$$

Sei nun Q_n mit $n \geq 1$ ein projektiver Raum über K $\Rightarrow$ Es gibt eine multiprojektive Abbildung

$$f : \underset{i=1}{\overset{r}{\times}} P^i_{n_i} \to Q_n$$

mit $f(P^1_0, \cdots, P^r_0) \neq f(\overline{P^1_0}, \cdots, \overline{P^r_0})$.

Da aber für alle linearen projektiven Abbildungen

$$f^* : \underset{i=1}{\overset{r}{\times}} P^i_{n_i} \to Q_n \qquad \text{gilt}$$

$$f^* F(P^1_0, \cdots, P^r_0) = f^* F(\overline{P^1_0}, \cdots, \overline{P^r_0}) \Rightarrow f^* F \neq f \qquad \forall f^*$$

im Widerspruch zur Definition von F.

1.4 Satz. – *Seien* $\underset{i=1}{\overset{r}{\otimes}} P^i_{n_i}$ *und* $\underset{i=1}{\overset{r}{\otimes'}} P^i_{n_i}$ *zwei Tensorprodukte von* $P_{n_1}, \cdots, P_{n_r}$ *mit den zugehörigen multiprojektiven Abbildungen* F *bzw.* F'. $\Rightarrow$ *Es gibt eine Projektivität*

$$f : \underset{i=1}{\overset{r}{\otimes}} P^i_{n_i} \to \underset{i=1}{\overset{r}{\otimes'}} P^i_{n_i}$$

mit $fF = F'$.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
\underset{i=1}{\overset{r}{\otimes}} P^i_{n_i} \arrow[rr, shift left, "f^*"] & & \underset{i=1}{\overset{r}{\otimes'}} P^i_{n_i} \arrow[ll, shift left, "f'^*"] \\
& \underset{i=1}{\overset{r}{\times}} P^i_{n_i} \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "F'"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagramm 3.

Nach Definition 1.1 gibt es lineare projektive Abbildungen

$$f^* : \underset{i=1}{\overset{r}{\otimes}} P^i_{n_i} \to \underset{i=1}{\overset{r}{\otimes'}} P^i_{n_i}$$

und

$$f'^* : \underset{i=1}{\overset{r}{\otimes'}} P^i_{n_i} \to \otimes P^i_{n_i}$$

mit $F = f'^* F'$ und $F' = f^* F$

$\Rightarrow F = f'^* f^* F \Rightarrow f^* = f'^{*-1}$ leistet das Verlangte.

1.5 DEFINITION. – *Die Menge* $F\left(\underset{i=1}{\overset{r}{\times}} P^i_{n_i}\right)$ *heisst* « Segre–Mannigfaltigkeit » *und wird mit* $S_{n_1,\dots,n_r}$ *bezeichnet.*

Aus Satz 1.4 ergibt sich, dass alle Segre–Mannigfaltigkeiten $S_{n_1,\dots,n_r}$ projektiv äquivalent sind. Sei $S_0 = \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_0 \in \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i}$ und sei $\psi \in \Psi$. Dann wird $F\left(\underset{i=1}{\overset{r}{\times}} P^i_{\psi(i)}\right) = S_{\psi(1),\dots,\psi(r)}(S_0)$ bezeichnet.

1.6 SATZ. – *Es ist* $\langle S_{n_1,\dots,n_r}\rangle = \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i}$.

Beweis: Angenommen, es sei $\langle S_{n_1,\dots,n_r}\rangle \neq \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i}$, also ein echter Teilraum. Das es nun mehrere Fortsetzungen der Abbildung id: $\langle S_{n_1,\dots,n_r}\rangle \to \langle S_{n_1,\dots,n_r}\rangle$ auf ganz $\overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i}$ gibt, gäbe es dann im Widerspruch zu Definition 1.1 mehr als eine Abbildung

$$f : \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i} \to \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i} \qquad \text{mit} \quad Ff = F .$$

1.7 DEFINITION. – *Sei* $S_0 = \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_0 \in \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i}$ *und sei* $0 \leq t \leq r$. *Dann heisst* $T^{(t)}(S_0) := \sum_{\psi \in \Psi_t} S_{\psi(1),\dots,\psi(r)}(S_0)$ « Schmiegraum *t*–ter Stufe durch S_0 an die $S_{n_1,\dots,n_r}$ ».

Falls notwendig, wird $T^{(t)}(S_0) = {}^{S_{n_1,\dots,n_r}}T^{(t)}(S_0)$ bezeichnet. Natürlich gilt:

$$S_0 = T^{(0)}(S_0) \subset \cdots \subset T^{(t)}(S_0) \subset T^{(t+1)}(S_0) \subset \cdots \subset T^{(r)}(S_0) = \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_{n_i} .$$

1.8 DEFINITION. – *Eine Teilmenge* $V^r_n \subset S_{(n)^r}$ *heisst* « Veronese–Mannigfaltigkeit » $\Longleftrightarrow$ *Es gibt r Projektivitäten*

$$f_i : P_n \to P^i_n \qquad (i = 1, \dots, r)$$

mit

$$V^r_n = Ff(P_n) ,$$

wobei $f = (f_1, \dots, f_r) : P_n \to \underset{i=1}{\overset{r}{\times}} P^i_n$ *gesetzt ist.*

1.9 SATZ. – *Seien* V^r_n *und* $\tilde{V}^r_n$ *zwei Veronese–Mannigfaltigkeiten Mit den definierenden Abbildungen* f *bzw.* $\tilde{f}$.

$$\Rightarrow \exists \text{ eine Projektivität } \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_n \to \overset{r}{\underset{i=1}{\otimes}} P^i_n \quad \text{mit} \quad g(V^r_n) = \tilde{V}^r_n .$$

Beweis:

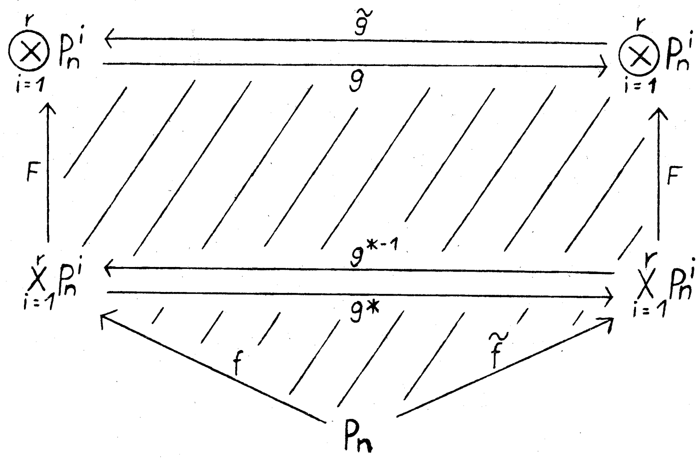

Diagramm 4.

$$\text{Dabei ist } g^* : \begin{cases} \overset{r}{\underset{i=1}{\times}} P_n^i \to \overset{r}{\underset{i=1}{\times}} P_n^i \\ (P_0^1, \cdots, P_0^r) \to (\tilde{f}_1 f_1^{-1}(P_0^1), \cdots, \tilde{f}_r f_r^{-1}(P_0^r)). \end{cases}$$

Da Fg^* multiprojektiv ist $\Rightarrow$ Es gibt genau eine lineare projektive Abbildung

$$g : \bigotimes_{i=1}^{r} P_n^i \to \bigotimes_{i=1}^{r} P_n^i \quad \text{mit}$$

$$Fg^* = gF ;$$

ebenso gibt es genau eine lineare projektive Abbildung

$$\tilde{g} : \bigotimes_{i=1}^{r} P_n^i \to \bigotimes_{i=1}^{r} P_n^i \quad \text{mit}$$

$$Fg^{*-1} = \tilde{g}F$$

$$\Rightarrow g\tilde{g} = \text{id} \Rightarrow \tilde{g} = g^{-1} \Rightarrow \text{Behauptung} .$$

Somit sind also alle Veronese–Mannigfaltigkeiten V_n^r untereinander projektiv äquivalent.

1.10 SATZ. – *Sei* PGL (V_n^r) *die Gruppe der Projektivitäten*

$$f : \bigotimes_{i=1}^{r} P_n^i \to \bigotimes_{i=1}^{r} P_n^i \quad \textit{mit}$$

$$f(S_{(n)^r}) = S_{(n)^r} \quad \textit{und}$$

$$f(V_n^r) = V_n^r .$$

$\Rightarrow$ PGL (V_n^r) *ist isomorph zur Gruppe* PGL (P_n) *der Projektivitäten des* P_n *auf sich.*

Beweis: Dass PGL (V_n^r) eine zu PGL (P_n) isomorphe Untergruppe besitzen muss, ergibt sich unmittelbar aus der Definition der V_n^r:

Sei $g \in \mathrm{PGL}(P_n) \Rightarrow Ffgf^{-1}F^{-1} \in \mathrm{PGL}(V_n^r)$ und die Abbildung $g \to Ffgf^{-1}F^{-1}$ ist ersichtlich ein Isomorphismus.

Sei nun umgekehrt $\bar{g} \in \mathrm{PGL}(V_n^r) \Rightarrow f^{-1}F^{-1}\bar{g}Ff \in \mathrm{PGL}(P_n)$.

1.11 BEMERKUNG. – Da die Abbildung $Ff: P_n \to V_n^r$ in der Definition 1.8 bijektiv ist, lässt sich die V_n^r als ein Modell des P_n deuten, wobei die Mengen $Ff(P_1) = V_1^r \subset V_n^r$ die Rolle der Geraden spielen.

Für die Unter–Veronese–Mannigfaltigkeiten $V_k^r \subset V_n^r$ gelten also auch alle Sätze der projektiven Geometrie, wenn sie im Modell geeignet formuliert werden.

1.12 DEFINITION. – *Sei* $S_0 \in V_n^r$ *und* $0 \leq t \leq r$. *Dann heisst*

$$ {}^{V_n^r}T^{(t)}(S_0) := {}^{S_{(n)^r}}T^{(t)}(S_0) \cap \langle V_n^r \rangle $$

«Schmiegraum t–ter Stufe durch S_0 an die V_n^r».

Sei $V_k^r \subset V_n^r$. *Dann heisst*

$$ {}^{V_n^r}T^{(t)}(V_k^r) = \sum_{S_0 \in V_k^r} {}^{V_n^r}T^{(t)}(S_0) $$

«Schmiegraum t–ter Stufe an die V_n^r längs V_k^r».

1.13 SATZ. – *Jede* $V_n^r \subset S_{(n)^r}$ *hat die Eigenschaft*:

$$ |V_n^r \cap S_{\psi(1),\cdots,\psi(r)}(S_0)| = 1 $$

für alle $\psi \in \Psi_{r-1}$ *und alle* $S_0 \in S_{(n)^r}$.

Beweis: Sei o.B.d.A. $S_{\psi(1),\cdots,\psi(r)}(S_0) = P_0^1 \otimes \left(\bigotimes_{i=2}^{r} P_n^i\right)$.

Sei $f = (f_1, \cdots, f_r)$ die Abbildung aus Definition 1.8

$$ \Rightarrow P_0^1 \otimes \left(\bigotimes_{i=2}^{r} f_i f_1^{-1}(P_0^1)\right) S_{\psi(1),\cdots,\psi(r)}(S_0) \cap V_n^r . $$

Sei umgekehrt $P_0^1 \otimes \left(\bigotimes_{i=2}^{r} \bar{P}_0^i\right) S_{\psi(1),\cdots,\psi(r)}(S_0) \cap V_n^r$

$\Rightarrow \bar{P}_0^i = f_i f_1^{-1}(P_0^1)$, da die Abbildungen f_i bijektiv sind.

§ 2. DIE Φ_r^s–TRANSFORMATION

2.0 DEFINITION. – *Seien* V_n^r *und* V_n^{r+1} *zwei Veronese–Mannigfaltigkeiten,* $L(\langle V_n^r \rangle)$ *und* $L(\langle V_n^{r+1} \rangle)$ *die Teilraumverbände ihrer Hüllraume.*

Dann heisst die Abbildung

$$ \Phi_r^1 : \begin{cases} L(\langle V_n^r \rangle) \to L(\langle V_n^{r+1} \rangle) \\ \qquad P_k \to (P_k \otimes P_n) \cap \langle V_n^{r+1} \rangle \end{cases} $$

Φ_r^1–Transformation.

$\Phi_r^s := \Phi_r \Phi_r^{s-1}$ heisst Φ_r^s–Transformation.

Ferner werde $\Phi_r^0 = \mathrm{id}$ gesetzt.

Der untere Index r wird häufig weggelassen, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

2.1 SATZ. – *Es gilt*:

a) $$\Phi^s(P_k \cap P'_l) = \Phi^s(P_k) \cap \Phi^s(P'_l)$$

b) $$\Phi^s(P_k + P'_l) \supset \Phi^s(P_k) + \Phi^s(P'_l)$$

oder allgemeiner:

$$M \subset V^r_n \Rightarrow \Phi^s(\langle M \rangle) \supset \langle \Phi^s(M) \rangle .$$

Beweis: a) Es genügt offenbar, den Satz für Φ^1 zu zeigen:

$$\begin{aligned}\Phi^1(P_k \cap P'_l) &= ((P_k \cap P'_l) \otimes P_n) \cap \langle V^{r+1}_n \rangle \\ &= (P_k \otimes P_n) \cap (P'_l \otimes P_n) \cap \langle V^{r+1}_n \rangle \\ &= ((P_k \otimes P_n) \cap \langle V^{r+1}_n \rangle) \cap ((P'_l \otimes P_n) \cap \langle V^{r+1}_n \rangle) \\ &= \Phi^1(P_k) \cap \Phi^1(P'_l) .\end{aligned}$$

b) $$\Phi^s(\langle M \rangle) = \langle \Phi^s(\langle M \rangle) \rangle \supset \langle \Phi^s(M) \rangle .$$

2.2 SATZ. – *Sei* $V_0 \in V^r_n$

$$\Rightarrow \Phi^1(V_0) = V'_0 \in V^{r+1}_n .$$

Beweis: Sei $V_0 = \overset{r}{\otimes} P_0$ mit $P_0 \in P_n$

$$\Rightarrow \Phi^1(V_0) = \left((\overset{r}{\otimes} P_0) \otimes P_n \right) \cap \langle V^{r+1}_n \rangle \supset \overset{r+1}{\otimes} P_0 .$$

Nun ist aber $(\overset{r}{\otimes} P_0) \otimes P_n \subset S_{(n)^{r+1}}$. Läge noch ein weiterer Punkt

$$(\overset{r}{\otimes} P_0) \otimes P'_0 \in \langle V^{r+1}_n \rangle \quad \text{mit} \quad P_0 \neq P'_0$$

$$\Rightarrow \left| \langle V^{r+1}_n \rangle \cap S_{0,n,\ldots,n}(\overset{r+1}{\otimes} P_0) \right| \geq 2 \quad \text{im Widerspruch zu Satz 1.13}$$

$$\Rightarrow \Phi^1(V_0) = \Phi^1(\overset{r}{\otimes} P_0) = \overset{r+1}{\otimes} P_0 \in V^{r+1}_n .$$

KOROLLAR. – *Die Punktabbildung*

$$\Phi^1 : V^r_n \to V^{r+1}_n$$

ist bijektiv.

2.3 SATZ. – *Sei* $V_0 \in V^r_n$

$$\Rightarrow \Phi^1({}^{V^{r+1}_n}T^{(t)}(V_0)) = {}^{V^r_n}T^{(t)}(\Phi^1(V_0))$$

für $0 \leq t < r$.

Beweis: Es ist

$$ {}^{V_n^r}T^{(t)}(V_0) = S_{(n)^r}T^{(t)}(V_0) \cap \langle V_n^r \rangle $$

$$ \Rightarrow {}^{V_n^r}T^{(t)}(V_0) \otimes P_n $$

$$ = ({}^{S_{(n)^r}}T^{(t)}(V_0) \cap \langle V_n^r \rangle) \otimes P_n $$

$$ = ({}^{S_{(n)^r}}T^{(t)}(V_0) \otimes P_n) \cap (\langle V_n^r \rangle \otimes P_n) $$

$$ \Rightarrow ({}^{V_r^n}T^{(t)}(V_0) \otimes P_n) \cap \langle V_n^{r+1} \rangle $$

$$ = ({}^{S_{(n)^r}}T^{(t)}(V_0) \otimes P_n) \cap (\langle V_n^r \rangle \otimes P_n) \cap \langle V_n^{r+1} \rangle $$

$$ = ({}^{S_{(n)^r}}T^{(t)}(V_0) \otimes P_n) \cap \langle V_n^{r+1} \rangle $$

$$ = ({}^{S_{(n)^{r+1}}}T^{(t)}(\Phi^1(V_0))) \cap \langle V_n^{r+1} \rangle $$

$$ = {}^{V_n^{r+1}}T^{(t)}(\Phi^1(V_0)) \,. $$

2.4 SATZ. – *Sei* $g : \langle V_n^r \rangle \to \langle V_n^r \rangle$ *eine Projektivität mit* $g(V_n^r) = V_n^r$

$\Rightarrow$ *es gibt genau eine Projektivität*

$$ \tilde{g} : \langle V_n^{r+s} \rangle \to \langle V_n^{r+s} \rangle $$

mit $\Phi^s g = \tilde{g}\Phi^s$:

$$ \begin{tikzcd} \langle V_n^{r+s} \rangle \arrow[r, "\exists!\,\tilde{g}"] & \langle V_n^{r+s} \rangle \\ \langle V_n^r \rangle \arrow[u, "\Phi^s"] \arrow[r, "g"] & \langle V_n^r \rangle \arrow[u, "\Phi^s"'] \end{tikzcd} $$

Diagramm 5.

Beweis: Sei $V_0 \in V_n^r$ mit $V_0 = F_{(r)}f_{(r)}(P_0)$. Aus Satz 2.2 folgt:

$$ \Phi^s(V_0) = F_{(r+s)}f_{(r+s)}(P_0) \,. $$

Sei nun g eine Projektivität

$$ g : \langle V_n^r \rangle \to \langle V_n^r \rangle $$

mit $g(V_n^r) = V_n^r$.

$\Rightarrow$ es gibt genau eine Projektivität

$$\bar{g} : \; P_n \to P_n$$

mit $g \, F_{(r)} f_{(r)} = F_{(r)} f_{(r)} \, \bar{g}$ (Satz 1.9)

$\Rightarrow$ Es gibt genau eine Projektivität

$$\tilde{g} : \; \langle V_n^{r+s} \rangle \to \langle V_n^{r+s} \rangle$$

mit $\tilde{g} \, (V_n^{r+s}) = V_n^{r+s}$, so dass gilt

$$\tilde{g} F_{(r+s)} f_{(r+s)} = F_{(r+s)} f_{(r+s)} \, \bar{g}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{g} F_{(r+s)} \, f_{(r+s)} &= \tilde{g} \Phi^s \, F_{(r)} \, f_{(r)} \\ &= \Phi^s \, F_{(r)} \, f_{(r)} \, \bar{g} \\ &= \Phi^s \, g F_{(r)} \, f_{(r)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{g} \Phi^s = \Phi^s g.$

Literatur

W. Burau, *Mehrdimensionale Projektive und Höhere Geometrie*. Berlin 1961.