Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Su un teorema della teoria delle equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.6, p. 516–519.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_6_516_0>

Equazioni a derivate parziali. — *Su un teorema della teoria delle equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine.* Nota (*) del Socio MAURO PICONE.

SUMMARY. — A first order linear partial differential equation is considered in an interval T of the r-dimensional cartesian space. Under suitable hypotheses it is shown that this equation has at most one smooth solution in T. This result generalizes to an arbitrary r a theorem given by the author, since 1930, in the case $r = 2$.

Gaetano Fichera, mio amato discepolo, in una sua Memoria, attualmente in corso di stampa, dal titolo: *Metodi e risultati concernenti l'Analisi numerica e quantitativa*, getta uno sguardo panoramico, sui metodi seguiti e sulle scoperte conquistate, nel mondo intero, durante quest'ultimo mezzo secolo, appartenenti a taluni rami, a mio avviso importanti, per il progresso della Matematica nelle sue applicazioni alle Scienze fisiche. Questa Memoria, senza dubbio, farà testo nel futuro prossimo e lontano.

In essa è anche ricordato un teorema dato nella antica mia Memoria, dal titolo: *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del second'ordine*, inserita nel volume VII della Serie quarta degli Annali di Matematica pura e applicata, nel 1930. Nel 1928, dalla Società Reale di Napoli, insignita del Premio Tenore.

1. Ecco il teorema:

Sia T *un dominio rettangolare del piano* (x, y), *di punti estremi* (x', y') *e* (x'', y''), *luogo dei punti le cui coordinate verificano le limitazioni*:

$$x' \leqq x \leqq x'' \quad , \quad y' \leqq y \leqq y'' .$$

Se, per le funzioni reali

$$a_1(x, y) \quad , \quad a_2(x, y) \quad , \quad b(x, y)$$

definite in T, *si ha ivi sempre*

$$a_1(x', y) \leqq 0 \quad , \quad a_1(x'', y) \geqq 0 \quad , \quad a_2(x, y') \leqq 0 \quad , \quad a_2(x, y'') \geqq 0 \, ,$$
$$b(x, y) > 0 \, ,$$

l'equazione, lineare omogenea del prim'ordine,

$$a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y) u = 0$$

ha un'unica soluzione, continua in T, *ivi dotata di derivate parziali del prim'ordine, e quindi è lo zero.*

(*) Presentata nella seduta del 9 dicembre 1972.

Questo teorema pone il problema seguente

Assegnata la funzione reale $f(x, y)$, definita nel dominio T, *l'equazione*:

$$a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b(x, y) u = f(x, y),$$

che, nelle ipotesi del teorema enunciato, non può possedere più di una soluzione, ne possieda una? Nel caso affermativo, dare un metodo per calcolarla.

Con la presente Nota estendo il teorema enunciato alle equazioni lineari del prim'ordine, in un qualsivoglia numero di variabili reali indipendenti e dò la soluzione del posto problema, per una tale equazione, in un caso particolare.

2. TEOREMA. *Nello spazio euclideo reale* S, *a r dimensioni, luogo dei punti x di coordinate reali $x_1, x_2, \cdots, x_r$, siano assegnati i punti x' e x'' di coordinate*

$$x'_1, x'_2, \cdots, x'_r \quad ; \quad x''_1, x''_2, \cdots, x''_r,$$

essendo

$$x'_h < x''_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

e nel dominio rettangolare T(x', x'') *luogo dei punti dello spazio* S, *per i quali si ha*:

$$x'_h \leqq x_h \leqq x''_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, r),$$

siano definite le funzioni reali

$$a_h(x) \quad (h = 1, 2, \cdots, r), \qquad b(x),$$

verificanti, ivi, le diseguaglianze:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_h(x_1, \cdots, x_{h-1}, x'_h, x_{h+1}, \cdots, x_r) \leqq 0 \\ a_h(x_1, \cdots, x_{h-1}, x''_h, x_{h+1}, \cdots, x_r) \geqq 0 \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

$$(2) \qquad b(x_1, x_2, \cdots, x_r) > 0 .$$

Se, per la funzione reale

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_r)$$

continua nel dominio rettangolare T, *dotata di derivate parziali del prim'ordine, sussiste ivi l'identità*

$$(3) \qquad \sum_{h=1}^{r} a_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + b(x) u \equiv 0,$$

risulterà

$$u(x) \equiv 0, \quad \text{in T } ^{(1)}.$$

(1) Ovviamente, data l'omogeneità dell'equazione (3), il Teorema sussiste anche quando alle diseguaglianze della (2) si sostituiscono le opposte.

Dimostrazione. La funzione $u(x)$ non potrà avere, in T, un minimo negativo. Infatti se tale minimo avesse luogo in un punto $x^{(0)}$, interno a T, risulterebbe

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)_{x=x^{(0)}} = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

e quindi, dalla (3),

$$b(x^{(0)})\, u(x^{(0)}) = 0\,,$$

e, per la (2), ciò è assurdo.

La frontiera di T si compone di due parti $\delta' T$ e $\delta'' T$, la prima contenente il punto x' e la seconda contenente il punto x''. Se il detto minimo si verificasse in un punto $x^{(0)}$ di $\delta' T$, in esso risulterebbe

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)_{x=x^{(0)}} \geqq 0\,, \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

e quindi, in base alla prima delle (1) e alla (2)

$$\sum_{h=1}^{r} a_h(x^{(0)}) \left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)_{x=x^{(0)}} + b(x^{(0)})\, u(x^{(0)}) < 0\,, \tag{4}$$

il che è contraddetto dalla (3). Se il minimo avesse luogo in un punto $x^{(0)}$ di $\delta'' T$, in esso risulterebbe

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)_{x=x^{(0)}} \leqq 0\,, \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

e quindi, in base alla seconda delle (1) e alla (2), di nuovo la (4).

Allo stesso modo si dimostra che la $u(x)$ non può avere in T un massimo positivo. Si avrà, dunque, in T,

$$u(x) \geqq 0 \qquad \text{e} \qquad u(x) \leqq 0\,,$$

donde $u(x) \equiv 0$.

3. Siano $p_1, p_2, \cdots, p_r$ numeri negativi e $q_1, q_2, \cdots, q_r$ numeri positivi e sia T il dominio rettangolare dello spazio S luogo dei punti per i quali riesce:

$$p_h \leqq x_h \leqq q_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)\,,$$

sia $b(x)$ una costante *positiva* b e $f(x)$ un'assegnata funzione, reale e continua in T. Il primo membro dell'equazione

$$\sum_{h=1}^{r} x_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + bu = f(x)\,, \tag{5}$$

verifica, nel dominio T, le ipotesi del teorema dimostrato e ci proponiamo di darne l'unica possibile soluzione in un notevole caso particolare.

Se $f(x) \equiv 0$ in T, è soluzione della (5) una qualsivoglia funzione omogenea di grado negativo $-b$, e se si richiede la sua continuità in tutto T, essa è lo zero, in accordo col teorema dimostrato. Sia $f(x)$ una qualsivoglia funzione analitica in T, ivi dotata dello sviluppo in serie di potenze

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} f_{k_1 k_2 \cdots k_r} \, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r} , \tag{6}$$

assolutamente ed uniformente convergente. È immediata la verifica che la funzione $u(x)$, definita in T, dell'eguaglianza

$$u(x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} \frac{f_{k_1 k_2 \cdots k_r}}{b + k_1 + k_2 + \cdots + k_r} \, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r} , \tag{7}$$

è la soluzione della (5).

Lo spettro del parametro b, nell'equazione (5) è costituito dall'intervallo aperto $(-\infty, -1)$ poiché, per ogni valore di b minore di -1, l'equazione omogenea associata alla (5) ha per soluzione una qualsivoglia funzione omogenea di grado $-b$ maggiore di 1.

Ciò nonostante, se $-b$ non è un intero e $f(x)$ ammette in T lo sviluppo (6) ivi assolutamente ed uniformemente convergente, l'equazione (5) possiede sempre soluzione, data dalla somma della (7) e di una qualsivoglia funzione omogenea di grado $-b$.

Se $-b$ è un intero, l'equazione (5) possiede soluzione se risulta

$$f_{k_1 k_2 \cdots k_r} = 0 , \qquad \text{per} \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = -b ,$$

ed è, allora, soluzione della (5) la somma della (7), al cui secondo membro si sopprimano gli addendi per i quali

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = -b ,$$

e di una qualsivoglia funzione omogenea di grado $-b$.

Posto

$$x_k = \rho t_k ,$$

con

$$\rho \geqq 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{r} t_k^2 = 1 ,$$

l'equazione (5) si scrive, ovviamente,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + bu = f(\rho t_1 , \rho t_2 , \cdots , \rho t_r) .$$