Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'équation des ondes avec un terme nonlinéaire, monotone dans la fonction inconnue. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.6, p. 508–515.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_6_508_0>

Analisi matematica. — *Sur l'équation des ondes avec un terme non linéaire, monotone dans la fonction inconnue.* Nota II (*) di MARCO BIROLI (**), presentata dal Socio L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema 2 enunciato nella Nota I.

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.

Démontrons, d'abord, le Théorème 2 dans le cas où $f(t) \in \mathfrak{L}^{\infty}(\mathbf{R}\,;\mathfrak{L}^2(\Omega))$ avec $\frac{df}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}\,;\mathfrak{L}^2(\Omega))$ et β est une fonction lipschitzienne. Considérons le problème de Cauchy

$$
\begin{aligned}
(3.1) \qquad & u''(t) + Au(t) + \alpha u'(t) + \beta(u(t)) = f(t) \quad \text{p.p. sur } \mathbf{R}_+ \text{ dans } \mathfrak{L}^2(\Omega)\\
& u(0) = u_0 \qquad u'(0) = u_1\\
& u(t) \in E \qquad \text{p.p. sur } \mathbf{R}_+
\end{aligned}
$$

où $u_1 \in H^1_0(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ et $U = (u_0, u_1)$. Posons $M = \operatorname*{Sup}_{\mathbf{R}} \|f(t)\|_{\mathfrak{L}^2}$ et démontrons que (3,1) a une solution $u(t)$, telle que

$$
(3,2) \qquad \left(\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_E + \int_\Omega j(u(t,x))\,dx\right) \le \operatorname{Max}\left(c\,, \frac{1}{2}\|U\|^2_E + \int_\Omega j(u_0(x))\,dx\right)
$$

où c est une constante qui depende uniquement de M.

De [1] on a que (3,1) a, au moins, une solution $u(t) \in C(\mathbf{R}_+\,; E)$.

Multiplions l'équation dans (3,1) pour $u'(t)$ et integrons; on a pour $t_1 \le t_2$

$$
(3,3) \qquad \frac{1}{2}\|u(t_2)\|^2_E + \int_\Omega j(u(t_2,x))\,dx - \left(\frac{1}{2}\|u(t_1)\|^2_E + \int_\Omega j(u(t_1,x))\,dx\right) \le
$$

$$
\le \int_{t_1}^{t_2} [(f(t), u'(t))_{\mathfrak{L}^2} - \alpha\|u'(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2}]\,dt\,.
$$

Démontrons d'abord (3,2) pour $t \in [0, 1]$.

Supposons dans (3,3) $t_1, t_2 \in [0, 1]$; si, dans $[t_1, t_2]$, $\alpha\|u'(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2} \ge (f(t), u'(t))_{\mathfrak{L}^2}$ alors la fonction $\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_E + \int_\Omega j(u(t,x))\,dx$ est non croissante

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1972.

(**) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

dans $[t_1, t_2]$; si, au contraire, dans $[t_1, t_2]$, $\alpha \| u'(t) \|^2_{\mathcal{L}^2} \leq (f(t), u'(t))_{\mathcal{L}^2}$, alors la fonction $\frac{1}{2} \| u(t) \|^2_E + \int_\Omega j(u(t, x)) \, dx$ est croissante.

Il suffira alors de démontrer que dans ce deuxième cas on a

$$\frac{1}{2} \| u(t_2) \|^2 + \int_\Omega j(u(t_2, x)) \, dx \leq c$$

où c est une constante qui depende uniquement de M.

Observons que dans ce cas on a

$$\| u'(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq \frac{1}{\alpha} \| f(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq \frac{M}{\alpha} \tag{3,4}$$

p.p. sur $[t_1, t_2]$.

Multiplions maintenant l'équation dans (3,1) pour $u(t)$; on a

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} (\| u(t) \|^2_{H^1_0} + (\beta u(t), u(t))_{\mathcal{L}^2}) \, dt &\leq | (u'(t_2), u(t_2))_{\mathcal{L}^2} | + \\ &+ | (u'(t_1), u(t_1))_{\mathcal{L}^2} | + \int_{t_1}^{t_2} \| u'(t) \|^2_{\mathcal{L}^2} dt + \alpha \int_{t_1}^{t_2} (u'(t), u(t))_{\mathcal{L}^2} dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} (f(t), u(t))_{\mathcal{L}^2} dt \leq M (\| u(t_2) \|_{\mathcal{L}^2} + \| u(t_1) \|_{\mathcal{L}^2}) + \\ &+ M^2 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \| u(t) \|^2_{H^1_0} dt + c_1 .\end{aligned} \tag{3,5}$$

Étant $\| u(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq \| u(t_1) \|_{\mathcal{L}^2} + M(t - t_1)$ pour $t \geq t_1$, de (3,5) on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \| u(t) \|^2_{H^1_0} + \int_\Omega (\beta u(t), u(t))_{\mathcal{L}^2} \right) dt \leq c_2 + c_3 \| u(t_1) \|_{\mathcal{L}^2} \tag{3,6}$$

dont

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \| u(t) \|^2_E + \int_\Omega j(u(t, x)) \, dx \right) dt \leq c_2 + c_3 \| u(t_1) \|_{\mathcal{L}^2} . \tag{3,7}$$

Il y a alors un point $t^* \in [t_1, t_2]$ tel que

$$\frac{1}{2} \| u(t^*) \|^2_E + \int_\Omega j(u(t^*, x)) \, dx \leq c_2 + c_3 \| u(t_1) \|_{\mathcal{L}^2} . \tag{3,8}$$

De (3,3) on a alors

$$\frac{1}{2}\|u(t_2)\|_E^2 + \int_\Omega j(u(t_2, x))\,dx \leq c_2 + c_3\|u(t_1)\|_{\mathfrak{L}^2} +$$

$$+ \int_{t^*}^{t} (f(t), u'(t))_{\mathfrak{L}^2}\,dt \leq c_4 + c_3\|u(t_1)\|_{\mathfrak{L}^2} \leq$$

$$\leq c_4 + c_5\left(\frac{1}{2}\|u(t_1)\|_E^2 + \int_\Omega j(u(t_1, x))\,dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c_4 + c_5\left(\frac{1}{2}\|u(t_2)\|_E^2 + \int_\Omega j(u(t_2, x))\,dx\right)^{1/2}$$

dont la thèse.

Pour démontrer (3,2) il suffit alors démontrer que

$$\frac{1}{2}\|u(t+1)\|_E^2 + \int_\Omega j(u(t+1, x))\,dx \leq$$

$$\leq \operatorname{Max}\left(c, \frac{1}{2}\|u(t)\|_E^2 + \int_\Omega j(u(t, x))\,dx\right)$$

p.p. sur $\mathbf{R}_+$, où c est une constante qui depende uniquement de M.

Fixons t; si

$$\alpha\int_t^{t+1}\|u'(\eta)\|_{\mathfrak{L}^2}^2\,d\eta \leq \int_t^{t+1}(f(\eta), u'(\eta))_{\mathfrak{L}^2}\,d\eta$$

de (3,3) on a

$$\frac{1}{2}\|u(t+1)\|_E^2 + \int_\Omega j(u(t+1, x))\,dx \leq \frac{1}{2}\|u(t)\|_E^2 + \int_\Omega j(u(t, x))\,dx$$

dont la thèse.

Il suffit alors démontrer la thèse dans le cas

$$\alpha\int_t^{t+1}\|u'(\eta)\|_{\mathfrak{L}^2}^2\,d\eta \leq \int_t^{t+1}(f(\eta), u'(\eta))_{\mathfrak{L}^2}\,d\eta\,. \tag{3,9}$$

De (3,9) on a

$$\int_t^{t+1}\|u'(\eta)\|_{\mathfrak{L}^2}^2\,d\eta \leq \frac{1}{\alpha}\int_t^{t+1}\|f(\eta)\|_{\mathfrak{L}^2}^2\,d\eta \leq \frac{M^2}{\alpha}\,.$$

Il y a alors deux points $t' \in [t, t+1/4]$, $t'' \in [t+3/4, t+1]$, tels que

$$\|u'(t')\|_{\mathfrak{L}^2} \leq \frac{4\,M}{\sqrt{\alpha}} \qquad \|u'(t'')\|_{\mathfrak{L}^2} \leq \frac{4\,M}{\sqrt{\alpha}}\,. \tag{3,10}$$

On a aussi pour $\xi \in [t, t+1]$

(3,11) $$\| u(\xi) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq \| u(t) \|_{\mathfrak{L}^2} + \mathrm{M} .$$

Multiplions maintenant l'équation dans (3,1) pour $u(t)$; on a

$$\int_{t'}^{t''} (\| u(\eta) \|^2_{\mathrm{H}^1_0} + (\beta u(\eta), u(\eta))_{\mathfrak{L}^2}) \, \mathrm{d}\eta \leq$$

$$\leq |(u'(t'), u(t'))_{\mathfrak{L}^2}| + |(u'(t''), u(t''))_{\mathfrak{L}^2}| +$$

$$+ \int_{t'}^{t''} \| u'(\eta) \|^2_{\mathfrak{L}^2} \, \mathrm{d}\eta + \alpha \int_{t'}^{t''} (u'(\eta), u(\eta))_{\mathfrak{L}^2} \, \mathrm{d}\eta + \int_{t'}^{t''} (f(\eta), u(\eta))_{\mathfrak{L}^2} \, \mathrm{d}\eta \leq$$

$$\leq \mathrm{M} (\| u(t') \|_{\mathfrak{L}^2} + \| u(t'') \|_{\mathfrak{L}^2}) + \mathrm{M}^2 + \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} \| u(\eta) \|^2_{\mathrm{H}^1_0} \, \mathrm{d}\eta + c_6$$

dont, pour (3,11),

$$\int_{t'}^{t''} \left(\frac{1}{2} \| u(\eta) \|^2_{\mathrm{H}^1_0} + \int_{\Omega} j(u(\eta, x)) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\eta \leq c_7 + c_8 \| u(t) \|_{\mathfrak{L}^2} .$$

Il y a alors un point $t^* \in [t, t+1]$, tel que

(3,12) $$\frac{1}{2} \| u(t^*) \|^2_{\mathrm{E}} + \int_{\Omega} j(u(t^*, x)) \, \mathrm{d}x \leq c_7 + c_8 \| u(t) \|_{\mathfrak{L}^2} .$$

De (3,3) on a alors

$$\frac{1}{2} \| u(t+1) \|^2_{\mathrm{E}} + \int_{\Omega} j(u(t+1, x)) \, \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq c_7 + c_8 \| u(t) \|_{\mathfrak{L}^2} + \int_{t^*}^{t} (f(\eta), u'(\eta)) \, \mathrm{d}\eta \leq c_9 + c_8 \| u(t) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq$$

$$\leq c_9 + c_{10} \left(\frac{1}{2} \| u(t) \|^2_{\mathrm{E}} + \int_{\Omega} j(u(t, x)) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c_9 + c_{10} \left(\frac{1}{2} \| u(t+1) \|^2_{\mathrm{E}} + \int_{\Omega} j(u(t+1, x)) \, \mathrm{d}x \right)$$

dont la thèse.

Par régularisation il est facil de voir que la thèse reste valable aussi pour $u_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, $j(u_0(x)) \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$, $u_1(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$.

Considérons maintenant la transformation $S : (u_0 , u_1) \to (u(T) , u'(T))$ et posons

$$\mathbf{K} = \left\{ (u_0 , u_1) \,\middle|\, u_0 \in H_0^1(\Omega) , u_1 \in \mathfrak{L}^2(\Omega) \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} (\| u_0 \|^2_{H_0^1} + \| u_1 \|^2_{\mathfrak{L}^2}) + \int_\Omega j(u_0(x)) \, dx \le c \right\} .$$

On a que $\mathbf{K}$ est un ensemble convexe fermé et borné de E et que S transforme $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$.

Pour démontrer, dans notre cas, l'existence d'une solution périodique de période T de (1,4), il suffit démontrer l'existence d'au moins un point fixe pour S.

Soit (u_{0n} , u_{1n}) une suite dans $\mathbf{K}$, telle que

$$\lim_{n \to +\infty}{}^{*} (u_{0n} , u_{1n}) = (u_0 , u_1) \qquad \text{dans E.}$$

Pour démontrer que S a au moins un point fixe, il suffit de démontrer qu'il y a une sous-suite de (u_{0n} , u_{1u}), que nous indiquons encore par (u_{0n} , u_{1n}), telle que

$$\lim_{n \to \infty}{}^{*} S(u_{0n} , u_{1n}) = S(u_0 , u_1)$$

dans E [3].

Considérons les problèmes de Cauchy

$$u''(t) + Au(t) + \alpha u'(t) + \beta u(t) = f(t) \quad \text{p.p. sur } [0 , T] \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \tag{3,13}$$
$$u(0) = u_{0n} \qquad u'(0) = u_{1n}$$
$$u(t) \in E \qquad \text{p.p. sur } [0 , T].$$

Pour la partie précédent de la démonstration, (3,13) a une solution $u_n(t)$, pour la quelle

$$\frac{1}{2} \| u_n(t) \|^2_E + \int_\Omega j(u_n(t , x)) \, dx \le c . \tag{3.14}$$

De (3,13) on a alors

$$\| u_n''(t) \|_{\mathfrak{L}^2} \le c_{11} \tag{3,15}$$

$$\| \beta u_n(t) \|_{\mathfrak{L}^2} \le c_{12} . \tag{3,16}$$

De (3,14) et (3,15) on a que $\{u_n(t)\}$ est une suite des fonctions equicontinues dans E; on peut donc supposer, sans perdre de generalité,

$$\lim_{n \to +\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t) \tag{3,17}$$

uniformément dans E sur $[o, T]$,

(3,18) $$\lim_{n\to+\infty}{}^{*}\ u_n''(t) = u''(t) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$$

(3,19) $$\lim_{n\to+\infty}{}^{*}\ \beta u_n(t) = \chi(t) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega)).$$

De (3,17) (3,19), étant β croissante, on a

(3,20) $$\chi(t) = \beta u(t).$$

De (3,17), (3,18) et (3,20) on a la thèse.

Passons, maintenant, à démontrer la thèse dans le cas general.

Indiquons par β_λ la régularisée Yoshida de β et par $\{f_\lambda(t)\}$ une suite, telle que

$$f_\lambda'(t) \in \mathfrak{L}^\infty(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$$

$$f_\lambda(t) \in \mathfrak{L}^\infty(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_\lambda(t) = f(t) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega)).$$

Considérons le problème

(3,21) $$u''(t) + Au(t) + \alpha u'(t) + \beta_\lambda u(t) = f_\lambda(t) \quad \text{p.p. dans } H^{-1}(\Omega)$$

$$u(t) \in E$$

$$u(t) \text{ périodique de période } T$$

où $f_\lambda(t)$ est prolongée par périodicité à $\mathbf{R}$.

Pour la partie précédente de la démonstration, le problème (3,21) a une solution $u_\lambda(t)$.

En multipliant (3,20) pour $u_\lambda'(t)$ et en integrant sur $[o, T]$ on a

(3,22) $$\int_0^T [(f_\lambda(t), u_\lambda'(t))_{\mathfrak{L}^2} - \alpha \| u_\lambda'(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2}]\, dt = o$$

dont

$$\int_0^T \| u_\lambda'(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2} \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^T \| f_\lambda(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2}\, dt.$$

On peut donc supposer que la suite $\{u_\lambda'(t)\}$ soit bornée dans $\mathfrak{L}^2(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

En multipliant (3,21) par $u_\lambda(t)$ et en integrant sur $[0, T]$

$$\int_0^T (\|u_\lambda(t)\|^2_{H_0^1} + (\beta_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))_{\mathfrak{L}^2})\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T (f_\lambda(t), u_\lambda(t))_{\mathfrak{L}^2}\, dt - \int_0^T \|u'_\lambda(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2}\, dt \leq$$

$$\leq c_{13} + \frac{1}{2} \int_0^T \|u_\lambda(t)\|^2_{H_0^1}\, dt$$

dont

$$\int_0^T \left(\frac{1}{2} \|u_\lambda(t)\|^2_{H_0^1} + (\beta_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))_{\mathfrak{L}^2}\right) dt \leq c_{14}. \tag{3,23}$$

On peut alors supposer qu'il y ait $\bar{t} \in [0, T]$ tel que

$$\frac{1}{2} \|u_\lambda(\bar{t})\|^2_E + (\beta_\lambda u_\lambda(\bar{t}), u_\lambda(\bar{t}))_{\mathfrak{L}^2} \leq c_{15} \tag{3,24}$$

et on peut supposer, sans perdre de generalité, $\bar{t} = 0$.

De (3,24) on a

$$\frac{1}{2} \|u_\lambda(0)\|^2_E + \int_\Omega j_\lambda(u_\lambda(0, x))\, dx \leq c_{15}. \tag{3,25}$$

En multipliant (3,21) pour $u'_\lambda(t)$, on a alors, pour $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|^2_E + \int_\Omega j_\lambda(u_\lambda(t, x))\, dx \leq c_{15} + \int_0^t (f_\lambda(t), u'_\lambda(t))_{\mathfrak{L}^2}\, dt,$$

dont $\{u_\lambda(t)\}$ est bornée dans E sur $[0, T]$ et $j_\lambda(u_\lambda(t, x))$ est bornée dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$ sur $[0, T]$. On peut alors affirmer, sans perdre de generalité, que

$$\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$$

$$\lim_{\lambda \to 0}{}^{**} u_\lambda(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^\infty(0, T; E). \tag{3,26}$$

De (3,23) on a

$$\int_0^T (\beta_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))_{\mathfrak{L}^2}\, dt \leq c_{15},$$

dont pour le Lemme 1 § 1, on peut supposer, sans perdre de generalité,

$$\lim_{\lambda\to 0}{}^{*} \beta_\lambda (u_\lambda (t , x)) = \sigma (t , x) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^1 (0 , T ; \mathfrak{L}^1 (\Omega)) \tag{3,27}$$

$$\sigma (t , x) \in \beta (u (t , x)) \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [0 , T] \times \Omega . \tag{3,28}$$

De (3,26) et (3,27) on peut supposer, sans perdre de generalité,

$$\lim_{\lambda\to 0}{}^{*} u''_\lambda (t) = u'' (t) \tag{3,29}$$

dans $\mathfrak{L}^1 (0 , T ; H^{-1} (\Omega) + \mathfrak{L}^1 (\Omega))$.

De (3,26) et (3,29) on peut supposer, sans perdre de generalité,

$$\lim_{\lambda\to 0}{}^{*} u_\lambda (t) = u (t) \tag{3,30}$$

uniformement sur $[0 , T]$ dans E.

De (3,27), (3,28), (3,29) et (3,30) on déduit que $u(t)$ est solution du problème

$$u'' (t) + Au (t) + \alpha u' (t) + \sigma (t) = f (t) \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans } \mathfrak{L}^1 (\Omega) + H^{-1} (\Omega)$$

$$u (t) \in E \quad \text{p.p.}, \quad u (t) \text{ périodique de période } T$$

$$\sigma (t) \in \mathfrak{L}^1_{loc} (\mathbf{R} ; \mathfrak{L}^1 (\Omega)) \quad , \quad \sigma (t , x) \in \beta (u (t , x)) \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans } \mathbf{R} \times \Omega .$$

La thèse est ainsi démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRÉZIS H., *Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to non linear partial differential equations*, Proc. Symposium Madison 1971, ed. by E. H. Zarantonello, Academic Press, 1971, pag. 101–156.

[2] BIROLI M., *Solutions bornées ou presque périodiques de l'equation non linéaire de la corde vibrante*, Note I, II, III, « Rend. Acc. Naz. Lincei », à paraître.

[3] HUKUHARA M., *Sur l'existance de points invariants d'une transformation des espaces fonctionelles*, « Japan J. of Math. », *20*, 1–4 (1950).