Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Tudor Zamfiresco

Sur les familles continues de courbes. Nota V

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.6, p. 505–507.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_6_505_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 dicembre 1972

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Sur les familles continues de courbes.* Nota V di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — Secondo una congettura di Grünbaum, ogni famiglia continua di curve che non sia un fascio dovrebbe ammettere almeno un punto tale che per esso passino esattamente due curve della famiglia. In questa Nota la congettura di Grünbaum è dimostrata per tutta una classe di famiglie; in particolare, per tutte quelle famiglie che non contengono cinque curve concorrenti.

1. La Note présente est consacrée à la suivante conjecture de M. B. Grünbaum:

CONJECTURE [1]. *Pour toute F.C.C. $\mathfrak{L}$ qui n'est pas un fascicule,*

$$T_2(\mathfrak{L}) \neq \varnothing .$$

Ici, F.C.C. signifie « famille continue de courbes », dont la définition est trouvable, par exemple, dans la première Note [3] de cette série; *fascicule*, comme d'ailleurs tous les autres termes spéciaux que nous utiliserons, était défini dans [3]; $T_n(\mathfrak{L})$ dénote l'ensemble des points dans le domaine D (dont la fermeture contient les courbes de notre F.C.C.) qui se trouvent sur exactement n courbes de la famille.

Nous allons prouver ici et dans la Note VI que cette Conjecture est vraie pour deux classes assez larges de F.C.C.'s, mais laissons ouvert le problème dans le cas général.

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1972.

2. Soit $f : (a , b) \to R$ une fonction bornée continue, telle que pour tout point $\mu \in f((a , b))$, on ait card $f^{-1}(\mu) \geq 2$.

Appelons point du type $(+ , +)$ (résp. $(+ , -)$, $(- , +)$, $(- , -)$) tout point x de (a , b) tel que x soit un maximum (resp. maximum, minimum, minimum) relatif stricte de $f \mid (a , x]$ et, simultanément, un maximum (resp. minimum, maximum, minimum) relatif stricte de $f \mid [x , b)$; soit $[+ , +]$ (resp. $[+ , -]$, etc.) la classe des points du type $(+ , +)$ (resp. $(+ , -)$, etc.).

LEMME 1. *Si pour tout* $\mu \in f((a , b))$, *card* $f^{-1}(\mu) < \aleph$, *alors tout point* $x \in (a , b)$ *est un extremum relatif stricte de chacune des restrictions* $f \mid (a , x]$ *et* $f \mid [x , b)$.

Quoi que l'étude similaire faite dans [4] se refère à une autre fonction f, la démonstration du Lemme 2 de là–bas peut être reprise entièrement.

LEMME 2. *S'il y a un point* $\pi \in f((a , b))$ *tel que card* $f^{-1}(\pi) = 2$, *alors il y a aussi un point* $\lambda \in f((a , b))$ *tel que card* $f^{-1}(\lambda) \geq 3$.

Démonstration. Il y a deux points $x_1 , x_2 \in (a , b)$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) = \pi.$$

D'après le Lemme 1, soit qu'il y a $\lambda \in f((a , b))$ avec card $f^{-1}(\lambda) \geq \aleph_0$, soit que l'on est dans une des huit situations suivantes:

(1) $\quad x_1 \in [+ , +], \quad x_2 \in [+ , +]$

(2) $\quad x_1 \in [+ , +], \quad x_2 \in [+ , -]$

(3) $\quad x_1 \in [+ , -], \quad x_2 \in [- , +]$

(4) $\quad x_1 \in [+ , -], \quad x_2 \in [- , -]$

(5) $\quad x_1 \in [- , +], \quad x_2 \in [+ , +]$

(6) $\quad x_1 \in [- , +], \quad x_2 \in [+ , -]$

(7) $\quad x_1 \in [- , -], \quad x_2 \in [- , +]$

(8) $\quad x_1 \in [- , -], \quad x_2 \in [- , -]$.

Nous démontrerons le Lemme seulement pour les situations (2) et (3), car les autres sont toutes analogues à une de ces deux.

Dans la situation (2), il y a deux voisinages V_1 et V_2 de x_1 et, respectivement, x_2, tels que si $y_1 , y_1' \in V_1 , y_2 \in V_2 , y_1 < x_1 < y_1'$ et $y_2 < x_2$, alors $\nu < \pi$, où $\nu = \max \{f(y_1), f(y_1'), f(y_2)\}$. D'après la propriété de Darboux, si $\lambda \in (\nu , \pi)$, alors il y a trois points différents, respectivement dans (y_1 , x_1), (x_1 , y_1') et (y_2 , x_2), avec λ comme image par f; donc card $f^{-1}(\lambda) \geq 3$.

Dans la situation (3), soit y un maximum absolu de $f \mid [x_1 , x_2]$. Si card $f^{-1}(f(y)) \geq 3$, prenons $\lambda = f(y)$. Si card $f^{-1}(f(y)) = 2$, alors il y a un point $z \in [x_1 , x_2]$ différent de y, avec $f(z) = f(y)$. Evidemment,

$$y \in [+ , +], \qquad z \in [+ , +]$$

et nous sommes à l'égard de y et z dans le cas (1), pour lequel la démonstration découle comme dans le cas déjà traité (2).

Soit maintenant $\mathfrak{L}$ une F.C.C..

LEMME 3 [2]. *Si* $T_4(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$, *alors* $M_5(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$.

3. THÉORÈME. *S'il y a dans* $\mathfrak{L}$ *une courbe sans points dans* $M_4(\mathfrak{L})$, *alors* $T_2(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$.

Démonstration. Soient $C = \operatorname{bd} D$, $p \in C$ et A un des arcs (minimaux) de C avec les mêmes extrémités que $L(p)$. Considérons les homéomorphismes

$$\varphi : [a , b] \to A \quad , \quad \psi : [c , d] \to L(p).$$

L'application $f : (a , b) \to (c , d)$ définie par

$$f(x) = \psi^{-1}(L(\varphi(x)) \cap L(p))$$

est évidemment continue.

Supposons maintenant que $L(p) \cap M_4(\mathfrak{L}) = \varnothing$ et aussi que $L(p) \cap \cap T_2(\mathfrak{L}) = \varnothing$. Cela signifie que, pour tout $\mu \in f((a , b))$, d'une part card $f^{-1}(\mu) < 3$ et, d'autre part card $f^{-1}(\mu) > 1$, c.-à-d. que card $f^{-1}(\mu) = 2$. Mais, en vue du Lemme 2, cela est impossible, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Si* $M_5(\mathfrak{L}) = \varnothing$, *alors* $T_2(\mathfrak{L}) = \varnothing$.

Le démonstration du Corollaire dérive immédiatement du Théorème précédent et du Lemme 3.

Nous remarquons à la fin que la classe des F.C.C.'s $\mathfrak{L}$ avec $M_5(\mathfrak{L}) = \varnothing$ est assez large et que la classe de celles F.C.C.'s $\mathfrak{L}$ pour lesquelles seulement un sous-ensemble propre de courbes rencontre éventuellement $M_4(\mathfrak{L})$ est encore plus large.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. GRÜNBAUM, « Arrangements and Spreads », Lectures delivered at a Regional Conference on Combinatorial Geometry, University of Oklahoma, June 21–25, 1971.

[2] T. ZAMFIRESCO, *On planar continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *21*, 513–530 (1969).

[3] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes I*, « Rend. Lincei », *42*, 771–774 (1967).

[4] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes II*, « Rend. Lincei », *43*, 13–17 (1967).