Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Teresa Vacca

Sulla funzione potenziale di un'equazione della magnetoidrodinamica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.5, p. 414–419.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_5_414_0>

Magnetoidrodinamica. — *Sulla funzione potenziale di un'equazione della magnetoidrodinamica* (*). Nota di MARIA TERESA VACCA, presentata (**) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider a differential equation that appeared in a previous work on the hydrodynamic and magnetic potentials. We obtain of the above equation a solution having an analogy with a Newtonian volume potential.

In una Nota precedente [1], considerando il moto lento di un fluido incompressibile, elettricamente conduttore e viscoso, sotto l'azione di un campo magnetico uniforme $\mathbf{H}_0$ e di forze di massa $\mathbf{F}$, riferite all'unità di massa, sono stata condotta alla considerazione dell'equazione

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right) \boldsymbol{w} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_S \frac{\mathbf{F}(\mathrm{M},t)}{r}\, d\mathrm{S} \tag{1}$$

dove ν è il coefficiente di viscosità cinematica, η il coefficiente di diffusività magnetica, $\boldsymbol{w}$ un vettore incognito, S il volume descritto dal punto M, in cui si suppone che agiscano le forze di massa $\mathbf{F}$ ed r è la distanza di un punto P dal punto M variabile in S.

Per trovare una soluzione della (1), espressa mediante un integrale di volume, che abbia il carattere di funzione potenziale, indicheremo semplicemente con $\Phi(\mathrm{P}, t)$ il secondo membro di essa, supposto noto, scrivendo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right) w = \Phi(\mathrm{P}, t), \tag{1'}$$

dove w e Φ possono essere funzioni scalari o vettori.

Consideriamo per questo le due equazioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\Delta_2\varphi_1 = 0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right)\Delta_2\varphi_2 = 0\,. \tag{3}$$

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le Applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria, sez. n. 2 (1972).

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1972.

(1) M. T. VACCA, *Alcune funzioni potenziali in magnetoidrodinamica*, « Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei », *52* (3) (1972).

La (2) ammette un integrale della forma

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \tag{4}$$

essendo f_1 una funzione per ora arbitraria degli argomenti indicati fra parentesi.

Analogamente la (3) porge l'integrale

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du \tag{5}$$

con f_2 funzione anch'essa per ora arbitraria.

Ponendo per semplicità

$$\nabla_\nu = \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2 \quad , \quad \nabla_\eta = \frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2 \tag{6}$$

si ha dalla (4)

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du\, - \\ - \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Ora con una integrazione per parti risulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du = \sqrt{\frac{\nu}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, u e^{-u^2}\, du = \\ = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du = \\ = \frac{\nu}{r} \int_0^r dr \int_0^r dr \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du = \\ = \nu \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,, r + 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du\, - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,, 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du - \int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(\mathrm{M}\,, 2\,u\,\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \right\}, \end{aligned}$$

dove l'apice in f_1' indica derivazione rispetto all'argomento $\xi = 2\,u\,\sqrt{\nu t}$.

Sostituendo nella (7) e semplificando si ha

$$\nabla_\nu \varphi_1 = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \right\}. \tag{8}$$

Analogamente dalla (5) si ha

$$\nabla_\eta \varphi_2 = -\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du \right\}. \tag{9}$$

Applichiamo ora a sinistra di ambo i membri della (8) l'operatore ∇_η ed a sinistra di ambo i membri della (9) l'operatore ∇_ν. Si ottiene così

$$\nabla_\eta \nabla_\nu \varphi_1 = \nabla_\nu \nabla_\eta \varphi_1 = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du \right\}$$

$$\nabla_\nu \nabla_\eta \varphi_2 = -\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du \right\}.$$

Se ora vogliamo che sia

$$\nabla_\nu \nabla_\eta (\varphi_1 + \varphi_2) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right)(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

dobbiamo determinare le funzioni f_1 ed f_2 in modo che sia identicamente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \nu f_1(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t}) + \eta f_2(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t}) \}\, e^{-u^2}\, du = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \nu f_1'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t}) + \eta f_2'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t}) \}\, e^{-u^2}\, du = 0. \tag{11}$$

Per questo basta che sia

$$\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du = 0 \tag{10'}$$

$$\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\, du + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} f_2'(\mathrm{M}, 2u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\, du = 0. \tag{11'}$$

Per trasformare la (11′) osserviamo che con una integrazione per parti si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\nu t})\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial u} f_1(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\nu t})\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\nu t})\,e^{-u^2}\,u\,\mathrm{d}u\,,$$

analogamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2'(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\eta t})\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\eta t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\eta t})\,e^{-u^2}\,u\,\mathrm{d}u$$

e pertanto la (11′) diventa

$$(12)\qquad \sqrt{\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\nu t})\,e^{-u^2}\,u\,\mathrm{d}u + \sqrt{\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\eta t})\,e^{-u^2}\,u\,\mathrm{d}u = 0.$$

Osserviamo che, se f_1 ed f_2 sono due funzioni pari dei rispettivi argomenti $2\,u\,\sqrt{\nu t}$ e $2\,u\,\sqrt{\eta t}$, cambiando u in $-u$ si ha identicamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\nu t})\,e^{-u^2}\,u\,\mathrm{d}u = \int_{+\infty}^{-\infty} f_1(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\nu t})\,e^{-u^2}\,u\,\mathrm{d}u = 0\,,$$

così pure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{M}\,,2\,u\,\sqrt{\eta t})\,e^{-u^2}\,u\,\mathrm{d}u = 0\,.$$

In tal caso la (12), e quindi la (11′), svanisce identicamente e rimane soltanto l'equazione (10′) che definisce ad esempio la funzione f_2 per mezzo della f_1.

Ciò premesso poniamo

$$(13)\qquad w\,(\mathrm{P}\,,t) = \int_{\mathrm{S}} (\varphi_1 + \varphi_2)\,\mathrm{dS} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathrm{S}}\frac{\mathrm{dS}}{r}\int_0^r \mathrm{d}r\int_0^r \mathrm{d}r\int_{-\infty}^{+\infty}\{f_1(\mathrm{M}\,,r+2\,u\,\sqrt{\nu t}) + f_2(\mathrm{M}\,,r+2\,u\,\sqrt{\eta t})\}\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

e facciamo vedere che nei punti interni al volume S la funzione w verifica l'equazione

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right) w =$$

$$= -\,4\,\sqrt{\pi}\,\nu\eta\int_{-\infty}^{+\infty}\{f_1(\mathrm{P}\,,2\,u\,\sqrt{\nu t}) + f_2(\mathrm{P}\,,2\,u\,\sqrt{\eta t})\}\,e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Invero, essendo la φ_1 regolare per $r \to 0$, ricordando la (8) si ha

$$\nabla_\nu \int_S \varphi_1 \, dS = \int_S \nabla_\nu \varphi_1 \, dS = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_S \frac{dS}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(M, 2u\sqrt{\nu t}) \, e^{-u^2} \, du + \right.$$

$$\left. + \int_S dS \int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(M, 2u\sqrt{\nu t}) \, e^{-u^2} \, du \right\}$$

ed applicando ad ambo i membri l'operatore ∇_η, per il teorema di Poisson sui potenziali newtoniani di volume, si ottiene

$$(15) \quad \nabla_\eta \nabla_\nu \int_S \varphi_1 \, dS = \nabla_\nu \nabla_\eta \int_S \varphi_1 \, dS = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_S \frac{dS}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(M, 2u\sqrt{\nu t}) \, e^{-u^2} \, du + \right.$$

$$\left. + \int_S dS \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1'(M, 2u\sqrt{\nu t}) \, e^{-u^2} \, du + 4\pi\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(P, 2u\sqrt{\nu t}) \, e^{-u^2} \, du \right\}.$$

Analogamente, ricordando la (9), si ha

$$(16) \quad \nabla_\nu \nabla_\eta \int_S \varphi_2 \, dS = -\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_S \frac{dS}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(M, 2u\sqrt{\eta t}) \, e^{-u^2} \, du + \right.$$

$$\left. + \int_S dS \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2'(M, 2u\sqrt{\eta t}) \, e^{-u^2} \, du + 4\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(P, 2u\sqrt{\eta t}) \, e^{-u^2} \, du \right\}.$$

Sommando membro a membro le relazioni (15) e (16) si deduce

$$(17) \quad \nabla_\nu \nabla_\eta \int_S (\varphi_1 + \varphi_2) \, dS \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta_2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta\Delta_2\right) w =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S \frac{dS}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\nu f_1(M, 2u\sqrt{\nu t}) + \eta f_2(M, 2u\sqrt{\eta t})\} \, e^{-u^2} \, du -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_S dS \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \{\nu f_1'(M, 2u\sqrt{\nu t}) + \eta f_2'(M, 2u\sqrt{\eta t})\} \, e^{-u^2} \, du -$$

$$- 4\sqrt{\pi}\,\nu\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \{f_1(P, 2u\sqrt{\nu t}) + f_2(P, 2u\sqrt{\eta t})\} \, e^{-u^2} \, du .$$

Semplificando, tenendo conto delle (10′) e (11′), si ha proprio la (14).

Confrontando con la (1′), si ha che se si pone

$$(18) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \{f_1(\mathrm{P}, 2\,u\sqrt{\nu t}) + f_2(\mathrm{P}, 2\,u\sqrt{\eta t})\}\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{\Phi(\mathrm{P}, t)}{4\sqrt{\pi}\,\nu\eta},$$

la funzione w espressa dalla (13), che ha analogia con i potenziali newtoniani di volume, nei punti interni al volume S verifica l'equazione (1′), mentre nei punti esterni verifica l'equazione omogenea corrispondente.

La questione è dunque ridotta a determinare la funzione f_2 per mezzo della f_1, servendosi della (10′) che si può scrivere anche

$$(19) \qquad \nu \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{P}, 2\,u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{P}, 2\,u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 0.$$

Dalle (18) e (19) si ricavano le relazioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathrm{P}, 2\,u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{\Phi(\mathrm{P}, t)}{4\sqrt{\pi}\,\nu(\eta-\nu)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mathrm{P}, 2\,u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{\Phi(\mathrm{P}, t)}{4\sqrt{\pi}\,\eta(\nu-\eta)}$$

che definiscono le funzioni f_1 ed f_2 per mezzo della funzione nota $\Phi(\mathrm{P}, t)$ (2).

(2) Si osservi che le f_1, f_2 si possono sempre considerare funzioni pari dell'argomento $\xi = 2\,u\sqrt{\nu t}$, oppure $\xi = 2\,u\sqrt{\eta t}$. Invero se supponiamo $f_i = \varphi_i + \psi_i$, $(i = 1, 2)$, con φ_i funzione pari e ψ_i funzione dispari dell'argomento ξ, si ha identicamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(2\,u\sqrt{\nu t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(2\,u\sqrt{\eta t})\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 0.$$