Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Fabrizio Cacciafesta

Sopra un'estensione di un teorema di F. Severi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.5, p. 395–401.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_5_395_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Geometria differenziale. — *Sopra un'estensione di un teorema di F. Severi.* Nota di FABRIZIO CACCIAFESTA (*), presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — A theorem of F. Severi giving a geodesic construction of Levi–Civita's parallelism is extended in the range of the linear connections with arbitrary torsion. Applications to totally geodesic submanifolds and to almost complex manifolds are given.

1. Sia V_n una varietà riemanniana n–dimensionale, sulla quale si consideri la connessione di Levi–Civita, e siano X , Y due vettori tangenti a V_n in un suo punto x. Il teorema di Severi cui si allude nel titolo, è quello affermante che il trasporto parallelo di X nella «direzione» di Y, in V_n, coincide col trasporto parallelo sulla superficie geodetica in x, tangente alla faccetta piana determinata dai vettori X , Y (onde appare un procedimento costruttivo «nell'infinitesimo» del parallelismo di Levi–Civita) (1).

Il teorema stesso può anche enunciarsi dicendo che la connessione definita dalla metrica riemanniana indotta su una sottovarietà p–dimensionale $V_p \subset V_n$, geodetica in x, coincide «in x» con la connessione di V_n; ovvero anche, dicendo che V_p risulta «autoparallela in x»; (per $p = 2$ si ha la costruzione sopra accennata).

In quest'ultima forma, il teorema viene qui esteso ad una classe più vasta di connessioni. Si dimostra, infatti, che esso è valido per ogni sottovarietà V_p geodetica rispetto ad una connessione tale che la traslazione di torsione (nel senso di E. Cartan) associata ai circuiti infinitesimi tracciati su V_p, sia tangente a V_p (§ II).

Questa ipotesi sulla torsione è in particolare soddisfatta per ogni V_p (geodetica), se la connessione è *semisimmetrica* (n. 4), condizione più debole di quella della simmetria della connessione (condizione, quest'ultima, equivalente all'identico annullarsi della torsione, e notoriamente soddisfatta dalla connessione di Levi–Civita).

L'ipotesi detta sulla torsione risulta poi sufficiente perché una sottovarietà totalmente geodetica sia autoparallela (il viceversa essendo sempre vero). L'equivalenza tra sottovarietà totalmente geodetiche e sottovarietà autoparallele, già nota ad E. Cartan nel caso di ambiente dotato della connessione di Levi–Civita, e collegata, da S. Kobayashi e K. Nomizu ([3]), alla simmetria della connessione, appare così come la versione «globale» del risultato «puntuale» espresso dal teorema di Severi.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. «Strutture algebriche e geometriche».

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1972.

(1) Vedi F. SEVERI [8].

Dei risultati ottenuti viene poi fatta applicazione alla determinazione di un criterio di totale geodeticità per le sottovarietà di V_n (§ III), nonchè al caso di varietà ambiente quasi complessa, dotata di connessione quasi complessa (§ IV).

In quest'ultimo ambito, le superficie caratteristiche risultano soddisfare la citata ipotesi sulla torsione, quando la connessione soddisfaccia una condizione che generalizza in modo spontaneo (n. 10) quella caratterizzante le connessioni « prive di torsione caratteristica » considerate da Martinelli ([4]). In questo caso, però, la presenza della struttura quasi complessa permette d'andare oltre una semplice trascrizione dei risultati validi per il caso reale. Si dimostra, invero, che, per aver l'autoparallelismo d'una superficie caratteristica, basta allora supporre che la superficie sia geodetica in un punto (non è necessaria cioè, come lo era nel caso reale, la geodeticità totale) (n. 12).

I. Richiami e premesse

2. Ricordiamo alcune definizioni e proprietà di cui faremo uso nel seguito (2).

L'ambiente entro il quale svolgeremo le nostre considerazioni sarà, fino ad avviso contrario, una varietà differenziabile reale V_n, che immagineremo descritta dalle coordinate locali x^α $(\alpha = 1, \cdots, n)$. La varietà sarà supposta dotata di connessione, rappresentata dalla forma ω di componenti $\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\, dx^\gamma$.

Se $X = (X^\alpha)$ ed $Y = (Y^\alpha)$ son due campi di vettori su V_n, il differenziale assoluto di Y secondo X è il campo vettoriale $\nabla_X Y$, di componenti

$$(\nabla_X Y)^\alpha = (\partial_\gamma Y^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} Y^\beta) X^\gamma . \tag{2.1}$$

3. Data una faccetta p-dimensionale $\mathcal{F}_p$, tangente in x a V_n, l'insieme delle linee geodetiche (3) per x tangenti ad $\mathcal{F}_p$ costituisce la *sottovarietà geodetica in x secondo $\mathcal{F}_p$*. Una sottovarietà che sia geodetica in ogni suo punto è *totalmente geodetica*.

Una particolarizzazione del concetto di sottovarietà totalmente geodetica è costituita da quello di *sottovarietà autoparallela*: ossia, tale che ogni vettore ad essa tangente rimanga tangente per spostamenti paralleli effettuati sulla sottovarietà.

Ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente perché una sottovarietà V_p sia autoparallela è che, dati comunque due campi di vettori X , Y tangenti a V_p, il campo $\nabla_X Y$ sia anch'esso tangente a V_p in ogni punto.

Dal criterio indicato, segue subito che *ogni sottovarietà autoparallela è totalmente geodetica* (4), mentre non è vero, in generale, il viceversa.

(2) Vedi per esempio S. Kobayashi–K. Nomizu [3].

(3) Avvertiamo che, col termine « linea geodetica », intenderemo sempre – secondo l'uso – una linea il cui campo tangente sia parallelo lungo la linea stessa rispetto alla connessione di V_n (dunque, in generale, senza alcuna implicazione di carattere metrico).

(4) Vedi S. Kobayashi–K. Nomizu [3], vol. 2, pag. 56.

4. Il *tensore di torsione* d'una connessione è un tensore T, di tipo (1,2), che in ogni punto x di V_n determina un'applicazione antisimmetrica e bilineare $\mathcal{C}_x(V_n) \times \mathcal{C}_x(V_n) \rightarrow \mathcal{C}_x(V_n)$ ($\mathcal{C}_x(V_n)$ essendo lo spazio tangente a V_n in x), definita dalla:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \tag{4.1}$$

dove $[X, Y]$ è la *parentesi di Poisson* dei campi di vettori X ed Y (costituente, com'è noto, un terzo campo di vettori).

In coordinate locali, la (4.1) si esplicita nella

$$(T(X, Y))^\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta})(X^\beta Y^\gamma - X^\gamma Y^\beta), \tag{4.2}$$

che giustifica il nome di *simmetriche* dato alle connessioni a torsione identicamente nulla ($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \Longleftrightarrow T = 0$).

Secondo il punto di vista di E. Cartan ([2]), $T(X, Y)$ rappresenta la traslazione subita da un punto x quando si sviluppi, su $\mathcal{C}_x(V_n)$, un « circuito infinitesimo » uscente da x, tracciato sulla varietà ed equivalente al bivettore $X \wedge Y$. Una sottovarietà $V_p \subset V_n$ tale che, per ogni circuito infinitesimo tracciato su di essa, la « traslazione di torsione » associata risulti tangente a V_p, sarà detta *a torsione tangente*. Occorre, in altri termini, che il vettore (4.1) riesca tangente a V_p per ogni coppia X, Y di campi tangenti alla sottovarietà.

Più in generale, diremo che una $V_p \subset V_n$ è *a torsione tangente in un suo punto* x, quando V_p soddisfaccia la condizione indicata nel punto x.

Se la connessione di V_n è simmetrica, ogni sottovarietà V_p risulta evidentemente a torsione tangente. Più in generale, ciò accade se la connessione è soltanto *semisimmetrica*; e cioè, se i coefficienti della connessione soddisfanno una relazione del tipo: $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = (S_\beta \delta^\alpha_\gamma - S_\gamma \delta^\alpha_\beta)$ (5).

Se V_p è una sottovarietà autoparallela, ed X, Y sono campi di vettori tangenti a V_p, i tre campi di vettori a secondo membro nella (4.1) sono tangenti a V_p. Ne segue il

TEOREMA I. – *Ogni sottovarietà autoparallela è a torsione tangente.*

II. ESTENSIONE DEL TEOREMA DI SEVERI

5. Sia ancora V_p una sottovarietà autoparallela di V_n. La connessione in V_n induce allora una connessione in V_p. L'operatore di differenziazione assoluta $'\nabla$ in V_p non è che la «restrizione» di ∇ a V_p; precisamente, se X, Y sono campi tangenti a V_p, si ha $'\nabla_X Y = \nabla_X Y$.

La connessione indotta su V_p ha significato « globale » per ogni V_p autoparallela. Una situazione analoga, soltanto « puntuale », vale per sottovarietà che siano, nel senso che ci accingiamo a chiarire, autoparallele « in un punto ».

(5) Vedi J. A. SCHOUTEN [7], pagg. 126 e 131 (esercizio III, 2, 3).

Precisamente, diremo che una sottovarietà V_p è *autoparallela in un suo punto* x se, per ogni coppia di campi di vettori X, Y tangenti a V_p, $\nabla_X Y$ riesce in x un vettore tangente a V_p. Diremo allora anche che la connessione dell'ambiente V_n induce su V_p una *connessione nel punto* x.

Evidentemente, una sottovarietà autoparallela in ogni suo punto secondo la definizione ora data, è propriamente autoparallela. Altrettanto evidente è il

TEOREMA 1'. – *Ogni sottovarietà autoparallela in un punto è ivi a torsione tangente.*

6. Dimostriamo ora il

TEOREMA 2. – *Una sottovarietà* V_p, *geodetica in* x *ed ivi a torsione tangente, è autoparallela in* x.

Dimostrazione. Rispetto ad ogni sistema di coordinate normali d'origine x, i coefficienti della connessione soddisfanno la relazione

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = 0 \qquad \text{in} \quad x \text{ (6)}. \tag{6.1}$$

D'altra parte, con opportuna scelta d'un tal sistema di coordinate normali, può supporsi V_p rappresentata dalle equazioni $x^l = 0$ $(l = p + 1, \cdots, n)$. L'ipotesi sulla torsione implica allora (vedi n. 4; in particolare, (4.2)): $\Gamma^l_{ab} - \Gamma^l_{ba} = 0$ in x, per $a, b = 1, \cdots, p$. Da (6.1) segue dunque che è, in x, $\Gamma^l_{ab} = 0$; ossia, che V_p è autoparallela in x.

Avuto riguardo al linguaggio indicato nel n. 5, il Teorema 2 può anche enunciarsi nella forma equivalente: *Se* V_p *è geodetica in* x *ed ivi a torsione tangente, la connessione di* V_n *induce su* V_p *una connessione nel punto* x.

Appare così come il risultato ora dimostrato costituisca una generalizzazione del teorema di Severi (7) relativo alle varietà riemanniane dotate della connessione di Levi-Civita (notoriamente priva di torsione). Infatti, tale teorema asserisce che il trasporto d'un vettore X, tangente a V_p in x, ad un punto x' «infinitamente vicino» su V_p, dà un vettore tangente alla varietà geodetica V_p, e formante lo stesso angolo di X con la linea geodetica che congiunge x ed x' (il che, per $p = 2$, già definisce il vettore trasportato). Qui non ha più senso parlare di angolo, ma il vettore trasportato con la connessione dell'ambiente V_n appare pur sempre come quello trasportato da x ad x' secondo la connessione indotta su V_p in x.

7. Come semplice applicazione del Teorema 2, siamo ora in grado di dimostrare il seguente, che inverte, in qualche misura, il risultato richiamato alla fine del n. 3:

TEOREMA 2'. – *Ogni sottovarietà totalmente geodetica ed a torsione ovunque tangente è autoparallela.*

(6) Vedi S. KOBAYASHI-K. NOMIZU [3], vol. 1, pag. 148.

(7) Vedi F. SEVERI [8]; vedi anche E. CARTAN [2], pag. 118.

Dimostrazione. È immediata, ove si pensi che la sottovarietà è, per le ipotesi ed in forza del Teorema 2, autoparallela in ogni suo punto.

Questo teorema costituisce un raffinamento di quello di S. Kobayashi–K. Nomizu (8), secondo il quale è autoparallela ogni sottovarietà che sia totalmente geodetica rispetto ad una connessione simmetrica. Lo stesso Teorema 2′ potrebbe d'altra parte dedursi anche solo modificando lievemente il procedimento dimostrativo usato dagli Autori citati.

III. UNA CARATTERIZZAZIONE DELLE SOTTOVARIETÀ TOTALMENTE GEODETICHE

8. Dimostriamo ora un criterio per la totale geodeticità delle sottovarietà V_p di V_n, del tipo di quello ricordato al n. 3 per l'autoparallelismo delle V_p. Precisamente:

TEOREMA 3. – *Una sottovarietà* V_p *è totalmente geodetica se e soltanto se il campo* $\nabla_X Y + \nabla_Y X$ *è ovunque tangente a* V_p, *per ogni coppia* X, Y *di campi tangenti ad essa.*

Dimostrazione. Sia V_p totalmente geodetica, ed indichiamo con $\overline{\nabla}$ la connessione simmetrica avente le stesse geodetiche di ∇ (che è definita da $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} T(X, Y)$). V_p è allora totalmente geodetica anche per $\overline{\nabla}$; è anzi, a norma del Teorema 2′, autoparallela per $\overline{\nabla}$. Ne segue (n. 3) che, per ogni coppia X, Y di campi di vettori tangenti a V_p, è $\overline{\nabla}_X Y$ tangente a V_p. Allora è anche $\nabla_X Y + \nabla_Y X = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_Y X$ tangente a V_p.

Se, viceversa, $\nabla_X Y + \nabla_Y X$ è tangente a V_p, è tale anche $\overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_Y X = 2\overline{\nabla}_X Y$, onde V_p risulta autoparallela per $\overline{\nabla}$, e dunque totalmente geodetica per essa. Ma ∇ e $\overline{\nabla}$, avendo le stesse linee geodetiche, hanno anche le stesse varietà totalmente geodetiche; resta perciò dimostrato il teorema.

IV. APPLICAZIONI ALLE VARIETÀ QUASI COMPLESSE

9. Indichiamo qualche applicazione dei risultati ottenuti al caso in cui la varietà ambiente sia una V_{2n} quasi complessa.

Supporremo assegnata, entro V_{2n}, una *connessione quasi complessa*; ossia, tale che risulti nullo il differenziale assoluto del tensore quasi complesso:

$$\nabla F_k^h = 0 \qquad (h, k = 1, \cdots, 2n). \tag{9.1}$$

I sottospazi tangenti caratteristici, o *faccette caratteristiche*, sono allora invarianti per il trasporto definito dalla connessione (9).

(8) Vedi [3], vol. 2, pag. 58, Proposizione 8.6.
(9) Vedi ad esempio E. MARTINELLI [4], [5].

10. Tra le connessioni quasi complesse avremo interesse a considerare quelle, considerate da Martinelli, che sono *prive di torsione caratteristica*, cioè caratterizzate dal fatto che risulta nulla la torsione associata ai circuiti appartenenti alle 2–faccette caratteristiche.

Più in generale, diremo *di Martinelli generalizzata* una connessione quasi complessa la cui torsione, calcolata in corrispondenza ad un circuito tracciato su una 2–faccetta caratteristica, sia un vettore appartenente alla faccetta stessa.

Rispetto ad una connessione siffatta, le *superficie caratteristiche* (superficie i cui piani tangenti sono in ogni punto caratteristici) risultano a torsione tangente (n. 4).

11. Sia G la superficie geodetica in x secondo una 2–faccetta caratteristica $\mathfrak{F}_2^{(c)}$, con riguardo ad una connessione di Martinelli generalizzata. Siamo in condizioni d'applicare il Teorema 2 (n. 6). Un qualunque vettore X, tangente a G in x, viene allora trasportato dalla connessione in un vettore tangente a G in un punto x', « infinitamente vicino » ad x su G. Ne segue che la $\mathfrak{F}_2^{(c)}$ tangente a G in x si trasporta in una $\mathfrak{F}_2^{(c)\prime}$, anche caratteristica (n. 9), che è tangente a G in x'.

Si può dunque affermare che la superficie geodetica G *è caratteristica « nelle vicinanze di x »* (10).

12. Nello stesso ordine di idee, esaminiamo ora il caso d'una superficie geodetica che sia propriamente caratteristica. Si ha allora il

TEOREMA 4. – *Una superficie caratteristica, geodetica rispetto ad una connessione di Martinelli generalizzata, è autoparallela* (*e, quindi, anche totalmente geodetica*: *n.* 3).

Dimostrazione. Indichiamo con X il campo di vettori tangenti alle linee geodetiche descriventi la superficie caratteristica S, e con $\tilde{X} \equiv (\tilde{X}^h = F_l^h X^l)$ il campo coniugato. Si tratta di due campi di vettori definiti su S (con eccezione del punto di geodeticità x), ovunque tangenti ad S e linearmente indipendenti. Essi forniscono dunque, in ogni punto di $S - \{x\}$, una base per i vettori tangenti alla superficie; ne segue che la tesi sarà conseguita ove si provi che ciascuno dei quattro campi $\nabla_X X$, $\nabla_X \tilde{X}$, $\nabla_{\tilde{X}} X$, $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X}$ è tangente ad S.

Questo fatto segue, per $\nabla_X X$, dalla definizione di linea geodetica (11); per $\nabla_X \tilde{X}$, essendo la connessione quasi complessa, si ha $\nabla_X \tilde{X}^h = \nabla_X (F_l^h X^l) =$

(10) La proprietà qui accennata con linguaggio infinitesimale, corrisponde a quella secondo la quale, per sottovarietà geodetiche rispetto a connessioni quasi complesse, simmetriche e metriche, è nullo, nel punto di geodeticità, il differenziale assoluto della *deviazione caratteristica* di RIZZA ([6]) degli spazi tangenti alla sottovarietà. Invero, la deviazione caratteristica rappresenta una sorta di misura della « non caratteristicità » delle $2p$–faccette. Vedi F. CACCIAFESTA [1].

(11) In questo caso anzi, per opportuna scelta del campo X tangente alla geodetica, si ha $\nabla_X X = 0$.

$= F^h_l \nabla_X X^l$; quindi $\nabla_X \tilde{X}$ è il coniugato d'un vettore tangente ad S, e siccome S è caratteristica, è esso stesso tangente ad S. Da (4.1) si ha poi $T(X, \tilde{X}) = \nabla_X \tilde{X} - \nabla_{\tilde{X}} X - [X, \tilde{X}]$, da cui, essendo – per le ipotesi sulla connessione – $T(X, \tilde{X})$ tangente ad S, e così pure $[X, \tilde{X}]$, risulta che lo stesso è di $\nabla_{\tilde{X}} X$. Finalmente, è $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X}^h = \nabla_{\tilde{X}} (F^h_l X^l) = F^h_l \nabla_{\tilde{X}} X^l$; anche $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{X}$ appare pertanto come il coniugato d'un vettore tangente ad S, e dunque tangente ad S a sua volta.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. CACCIAFESTA, *Alcune osservazioni sulle sottovarietà delle varietà quasi complesse*, « Rend. di Mat. », *3* (3), 575–591 (1970).

[2] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Parigi 1946.

[3] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Interscience Publ., New York 1963–1969.

[4] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, « Ann. di Mat. pura ed appl. », *43*, 313–324 (1957).

[5] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, « Sem. Mat. Univ. Bari », *52–53* (1960).

[6] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *24*, 662–671 (1958).

[7] J. A. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus*, Springer, Berlino 1954.

[8] F. SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », *42*, 227–259 (1917).