ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SILVANO MATARASSO

**Sul problema di Dirichlet in un dominio di frontiera
non limitata**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 53 (1972), n.5, p. 362–367.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_5_362_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_5_362_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sul problema di Dirichlet in un dominio di frontiera non limitata* (*). Nota di SILVANO MATARASSO, presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We give an account of existence and unicity theorems for the Dirichlet problem and of Phragmén–Lindelöf type theorems, for elliptic equations of higher order in a domain with unbounded boundary.

In un lavoro in corso di stampa (1), ho dimostrato, oltre ad alcuni teoremi di esistenza ed unicità, teoremi di comportamento del tipo Phragmén–Lindelöf, relativi alle soluzioni deboli del problema esterno di Dirichlet per un'equazione ellittica di ordine superiore, a coefficienti reali, in un aperto Ω di frontiera non limitata.

Più precisamente, introdotta una opportuna classe X di funzioni, si dimostra che, se una funzione soddisfacente ad una opportuna limitazione di carattere integrale, verifica l'equazione e su $\partial\Omega$ ha i dati di Dirichlet di una $\xi \in X$ allora essa stessa appartiene ad X .

In questa Nota dò notizia di tali risultati riportando anche alcuni teoremi di esistenza ed unicità nella classe X .

I. NOTAZIONI ED IPOTESI (2)

Sia Ω un aperto la cui chiusura è un dominio non limitato di classe A^k , con k da determinarsi opportunamente di volta in volta; la sua frontiera $\partial\Omega$ sarà supposta non limitata.

Posto l'origine delle coordinate nel complementare di $\bar{\Omega}$, indichiamo con $|x|$ la distanza di $x = (x_1, \dots, x_n)$ dall'origine, con $\mathfrak{S}(x, r)$ la sfera di centro x e raggio r e con Σ_R la sfera con centro nell'origine e raggio R . Porremo poi:

$$\begin{aligned} I(x, r) &= \mathfrak{S}(x, r) \cap \bar{\Omega} \\ \Delta(x, h) &= I(x, h |x|^\theta), & 0 \leq \theta \leq 1 \\ \Omega_R &= \Sigma_R \cap \Omega. \end{aligned}$$

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1972.

(1) Cfr. S. MATARASSO, *Sul problema di Dirichlet in un dominio di frontiera non limitata*, « Ricerche di Matematica », 22 (1973) in corso di stampa. Per il caso di domini non limitati con frontiera limitata, si veda « Ricerche di Matematica », 20, 21 e questi « Rendiconti », 52.

(2) Per tutte le notazioni non esplicitamente definite, ci riferiamo a C. MIRANDA, *Partial differential equations of elliptic type*, « Ergebnisse der Mathematik », Springer Verlag (1970).

In alcuni teoremi supporremo $\bar{\Omega}$ di classe A^{m+1} e che si verifichino le condizioni:

a) fissato $\bar{x}_0 \in \partial\Omega$, esiste $\sigma_1 > 0$ indipendente da $\bar{x}_0$, tale che, per $\sigma < \sigma_1$, $\Delta(\bar{x}_0, \sigma) \cap \partial\Omega$ è rappresentabile in un sistema $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ normale-tangente con origine in $\bar{x}_0$, nella forma $\zeta_n = f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$; con ζ_n si è indicato l'asse normale in $\bar{x}_0$ alla superficie.

$$b) \quad D^\beta f = O(|\bar{x}_0|^{\gamma'(1-|\beta|)}), \quad |\beta| \leq m+1, \quad \gamma' \geq 0.$$

Osserviamo ora, a titolo d'esempio che, introdotta una funzione definita in $\mathbb{R}^{n-1}$ ed ivi di classe C^{m+1} , tale da risultare

$$(1.1) \quad D^\beta \varphi(x') = O(|x'|^{\gamma'(1-|\beta|)}), \quad 2 \leq |\beta| \leq m+1,$$

ove si è posto $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, l'aperto

$$\Omega = \{x : x_n > \varphi(x')\}$$

soddisfa alle condizioni a) e b) (cfr. nota ⁽¹⁾).

In particolare potremo assumere:

$$\varphi(x') = |x'|^\alpha.$$

È evidente allora che le (1.1) saranno verificate se

$$\alpha \leq 1 + \inf(1 - \gamma', m(1 - \gamma')),$$

dunque se $\gamma' \leq 1$ potrà assumersi $\alpha = 1$ e quindi come esempio di aperto che gode delle proprietà a) e b) potrà assumersi un aperto che, al di fuori di una sfera, coincida con un cono che abbia il vertice nel centro della sfera stessa.

Consideriamo ora l'equazione:

$$(1.2) \quad B[\varphi, u] = F[\varphi, f], \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

ove, con $\lambda = \text{cost.}$,

$$B[\varphi, \varphi] = \sum_{|\alpha|, |\beta|}^{0, m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta} D^\alpha \varphi D^\beta \varphi \, dx + (-1)^m \lambda \int_{\Omega} |x|^{-2m\theta} \varphi^2 \, dx,$$

$$F[\varphi, f] = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_\alpha D^\alpha \varphi \, dx,$$

con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, essendo gli α_i e i β_i interi non negativi, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$.

Indicheremo con A) le seguenti ipotesi:

A) la forma B, a coefficienti reali, è uniformemente ellittica in $\bar{\Omega}$; cioè posto

$$\sum_{\alpha+\beta=\mu} a_{\alpha\beta} = a_\mu,$$

si ha

$$\sum_{|\mu|=2m} a_\mu(x) \tau^\mu > C_1 |\tau|^{2m}, \quad C_1 > 0$$

ove $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ è non nullo e $|\tau|^2 = \tau_1^2 + \dots + \tau_n^2$; supporremo ancora che gli $a_{\alpha\beta}$ con $|\alpha| = |\beta| = m$, siano continui in $\bar{\Omega}$, e convergenti all'infinito e che si abbia

$$(1.3) \quad a_{\alpha\beta}(x) = O(|x|^{\gamma'(|\alpha|+|\beta|-2m)}), \quad \gamma' \geq 0.$$

In alcuni teoremi supporremo uniformemente continue in $\bar{\Omega}$ le funzioni $|x|^{\gamma'(2m-|\alpha|-|\beta|)} a_{\alpha\beta}(x)$ e anche che, con p da precisarsi nel seguito:

$$a_{\alpha\beta} \begin{cases} \in C^{|\alpha|+p} & |\alpha| > 0 \\ \in C^{1+p} & |\alpha| = 0 \end{cases} \quad a_{\alpha\beta} \begin{cases} \in C^{|\beta|+p} & |\beta| > 0 \\ \in C^{1+p} & |\beta| = 0. \end{cases}$$

Porremo poi $\tilde{\gamma} = \min\{\gamma', 1\}$.

Indicheremo con B) la seguente condizione:

B) con $0 \leq \theta \leq 1$ e per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha, con c_2 indipendente da φ ,

$$h(\lambda) \int_{\Omega} |x|^{-2m\theta} \varphi^2 dx + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} (D^\alpha \varphi)^2 dx \leq c_2 (-1)^m B[\varphi, \varphi]$$

ove $h(\lambda) > 0$.

Per il verificarsi della B) è sufficiente (cfr. nota ⁽¹⁾) che $\lambda > \lambda_1 > 0$ con λ_1 dipendente dagli $a_{\alpha\beta}$ e $\theta \leq \tilde{\gamma}$; osserviamo però che ciò non è necessario e in particolare non è necessaria la condizione su λ .

Supposte le f_α funzioni reali di classe $L_{loc}^2(\bar{\Omega})$, utilizzeremo le seguenti notazioni, ove a, b e κ sono numeri reali, μ verifica la condizione

$$0 < \mu < 1 \quad \text{e} \quad \nu = n/2 - 1 + \mu:$$

$$M_0(f, \Omega, \theta, \kappa) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} f_\alpha^2 |x|^{2\theta(m-|\alpha|)+2\kappa} dx,$$

$$M_1(f, \Omega, \theta, b, r_1) = \sup_{x_0 \in \Omega} M_0(f, \Delta(x_0, r_1), \theta, b),$$

$$M_2(f, \Omega, \theta, b, r_2) = \sup_{x_0 \in \Omega} \sup_{0 < \rho < r_2} \rho^{-\nu} M_0(f, I(x_0, \rho), \theta, b).$$

Nel seguito ometteremo tutti o alcuni degli argomenti da cui dipendono gli M_i nei casi in cui ciò non darà luogo ad equivoci.

In alcuni teoremi supporremo verificata la seguente condizione:

$$C) \quad M_0 + M_1 + M_2 < +\infty.$$

Porremo poi, con $h \leq m$ e σ reale,

$$U^{(h)}(\theta, \sigma, \Omega) = \left(\sum_{|\alpha|=h} \int_{\Omega} (D^{\alpha} u)^2 |x|^{2\theta(h-m)+2\sigma} dx \right)^{1/2}$$

$$U^{(h,2\nu)}(\theta, \sigma, r, \Omega) = \sup_{x_0 \in \Omega} \sup_{0 < \rho < r} \rho^{-\nu} U^{(h)}(\theta, \sigma, I(x_0, \rho)).$$

Infine poniamo:

$$\|u\|_{m, \theta, \sigma, \Omega}^2 = \sum_{h=0}^m (U^{(h)}(\theta, \sigma, \Omega))^2.$$

2. RISULTATI

Vengono stabilite innanzitutto alcune maggiorazioni relative a soluzioni di classe $H_{loc}^m(\bar{\Omega})$ della (1.2) aventi i dati di Dirichlet nulli su $\partial\Omega$.

Riportiamo una di tali maggiorazioni che esprime l'appartenenza di una eventuale soluzione debole del problema omogeneo di Dirichlet, ad una classe di Morrey, in opportune ipotesi sui coefficienti e i termini noti dell'equazione.

TEOREMA 2.1. *Nell'ipotesi che $\bar{\Omega} \in A^{m+1}$ e verifichi le condizioni a) e b), che siano verificate la (1.3) con $\gamma' > 0$, la B) e che $\theta \leq \tilde{\gamma}$, supposto ancora che $u \in H_{loc}^m(\bar{\Omega})$ soddisfi la (1.2), abbia i dati di Dirichlet nulli su $\partial\Omega$ e verifichi la condizione, con un fissato $h < r_1$ e con b reale*

$$(2.1) \quad \sup_{x_0 \in \Omega} |x_0|^{2b} \int_{\Delta(x_0, r_1) - \Delta(x_0, h)} u^2 |x|^{-2m\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} - 1} dx = T_2^2 < +\infty,$$

esiste r^* per il quale si ha:

$$\sum_{q=0}^m U^{(q,2\nu)}(\theta, b, r^*, \Omega) \leq K(T_2 + M_1 + M_2).$$

La costante $K = K(r_1, r_2, h)$ dipende da c_2 dagli $a_{\alpha\beta}$, dal cono caratteristico di Ω e dalle costanti che intervengono in a) e b).

Introduciamo, ora la classe $X = X(a, b, \theta, \kappa)$ delle funzioni ξ per le quali, fissati a, b, θ, κ reali, $0 \leq \theta \leq 1$, esistono $\eta_1, s_1, s_2 > 0$, tali che:

$$(2.2) \quad \sup_{x \in \Omega} |x|^{\theta(m-1+\mu)+a} E_{m-1, \mu}(\Delta(x, \eta_1)) + \sum_{q=0}^{m-1} \sup_{x \in \Omega} |x|^{\theta q+a} |D^q \xi| = Q < +\infty.$$

$$(2.3) \quad \|\xi\|_{m, \theta, \kappa, \Omega} = Q' < +\infty.$$

$$(2.4) \quad \sup_{x_0 \in \Omega} \|\xi\|_{m, \theta, b, \Delta(x_0, s_1)} = Q'' < +\infty.$$

$$(2.5) \quad \sum_{|\alpha| \leq m} E^{(|\alpha|, 2\nu)}(\theta, b, s_2, \Omega) = Q''' < +\infty.$$

È evidente che, fissati a, b, θ, κ se $u \in X$ con certi $\eta_1, s_1, s_2 > 0$ essa vi appartiene con qualsiasi $\eta_1, s_1, s_2 > 0$.

Sussiste il seguente teorema di comportamento:

TEOREMA 2.2. *Sia $\bar{\Omega}$ di classe A^{2m+p+1} con p intero $\geq n/2$ e verifichi le condizioni a) e b); supposte verificate le ipotesi A), B), C), e che*

$$(2.6) \quad 0 < \gamma' \quad 0 \leq \theta \leq \bar{\gamma}$$

$$(2.7) \quad a \leq \theta \left(\frac{n}{2} - m \right) + \kappa \quad b \geq \theta(m - 1 + \mu) + a$$

esiste $\lambda_0 > 0$ tale che, se $u \in H_{\text{loc}}^m(\bar{\Omega})$, ha su $\partial\Omega$ i dati di Dirichlet di $\xi \in X(a, b, \theta, \kappa)$ e verifica la (1.2) con $\lambda > \lambda_0$, la (2.1) e la condizione

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} |x|^{-2m\bar{\gamma} + \bar{\gamma} - 1 + 2\kappa} u^2 dx = T_1^2 < +\infty,$$

si deduce che $u \in X$ e precisamente con η^* ed r^* opportuni si ha:

$$(2.9) \quad \sup_{x \in \Omega} |x|^{\theta(m-1+\mu)+a} U_{m-1, \mu}(\Delta(x, \eta^*)) + \sum_{q=0}^{m-1} \sup_{x \in \Omega} |x|^{\theta q+a} |D^q u| \\ \leq K(M_0 + M_1 + M_2 + T_2 + Q + Q' + Q'' + Q''')$$

$$(2.10) \quad \|u\|_{m, \theta, \kappa, \Omega} \leq K(T_1 + M_0 + Q')$$

$$(2.11) \quad \sup_{x_0 \in \Omega} \|u\|_{m, \theta, \delta, \Delta(x_0, h)} \leq K(T_2 + M_1 + Q''), \quad h < r_1.$$

$$(2.12) \quad \sum_{|\alpha| \leq m} U^{(|\alpha|, 2\nu)}(\theta, b, r^*, \Omega) \leq K(T_2 + M_1 + M_2 + Q'' + Q''').$$

Vale poi il seguente teorema in cui si suppone ancora verificata la B), ma in cui non è necessariamente $\lambda > \lambda_0$:

TEOREMA 2.3. *Supposto $\kappa = 0$ e che al posto della (2.8) sia verificata la condizione*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{2R} - \Omega_R} |x|^{-2m\bar{\gamma} + \bar{\gamma} - 1} u^2 dx = T_1'^2 < +\infty$$

nelle ulteriori ipotesi del Teorema 2.2, si deduce che $u \in X(a, b, \theta, 0)$ con $a \leq \theta(n/2 - m)$ e $b \geq \theta(m - 1 + \mu) + a$; precisamente esistono η^* ed r^* opportuni per i quali valgono (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) in cui si sia posto $\kappa = 0$.

Sussistono poi i seguenti teoremi di esistenza:

TEOREMA 2.4. *Sia $\bar{\Omega}$ di classe A^{2m+p+1} con p intero $\geq n/2$ e verifichi le condizioni a) e b); supposto poi verificate le ipotesi A), B), C), la (2.6) e (2.7) e che*

$$\kappa \geq b - m(\bar{\gamma} - \theta) + \bar{\gamma} - 1,$$

consideriamo una funzione $\xi \in X(a, b, \theta, \kappa)$; esiste allora $\lambda_0 > 0$ tale che per $\lambda > \lambda_0$ la (1.2) ammette una soluzione $u \in X$, che su $\partial\Omega$ ha i dati di Dirichlet di ξ ; più precisamente esistono η^* ed r^* per cui si hanno (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), ove nei secondi membri si sopprimano T_1, T_2 .

Sussiste poi un altro teorema di esistenza in cui, pur essendo verificata la condizione B), non si suppone necessariamente $\lambda > \lambda_0 > 0$:

TEOREMA 2.5. *Supposto $\kappa = 0$ e nelle ulteriori ipotesi del Teorema 2.4, si consideri una funzione $\xi \in X(a, b, \theta, 0)$; esiste allora una funzione $u \in X$ che ha su $\partial\Omega$ i dati di Dirichlet di ξ e che verifica la (1.2); più precisamente esistono η^* ed r^* per i quali valgono le maggiorazioni stabilite nel Teorema 2.4, in cui si ponga $\kappa = 0$.*

Infine si ha il seguente teorema di unicità:

TEOREMA 2.6. *Nella ipotesi che Ω sia dotato della proprietà di cono, che siano verificate la (1.3) con $\gamma' > 0$ e $|\alpha| + |\beta| > 0$, la B) e inoltre valga la condizione*

$$(2.13) \quad \kappa \geq m(\theta - \bar{\gamma}) + \bar{\gamma} - 1$$

il problema di Dirichlet relativo alla (1.2) ammette al più una soluzione di classe X. In particolare, nelle ipotesi del Teorema 2.2 oppure del Teorema 2.3, e verificata la (2.13), il problema di Dirichlet relativo alla (1.2) ammette al più una soluzione.

Se poi, oltre alla (2.13), sono soddisfatte anche le ipotesi del Teorema 2.4 oppure 2.5, si ha esistenza ed unicità nella classe X.