Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'équation des ondes avec un terme non linéaire, monotone dans la fonction inconnue. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.5, p. 359–361.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_5_359_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi matematica. — *Sur l'équation des ondes avec un terme non linéaire, monotone dans la fonction inconnue.* Nota I [(*)] di

MARCO BIROLI [(**)], presentata dal Socio L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dà un teorema di esistenza per la soluzione periodica di una equazione iperbolica non lineare nella funzione incognita.

§ 1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉES

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ régulière et β un graphe maximal monotone de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ avec $0 \in D(\beta)$ $0 \in \beta 0$.

Indiquons par E l'espace $\{U = (u_0(x), u_1(x))\ ;\ u_0(x) \in H_0^1(\Omega), u_1(x) \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}$ avec la norme

$$\|U\|_E^2 = \|u_0\|_{H_0^1}^2 + \|u_1\|_{\mathcal{L}^2}^2\ ;$$

on dit que E est l'espace de l'energie.

Soit, maintenant, $y(t, x)$ une fonction telle que $y(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$ $\frac{\partial y}{\partial t}(t, \cdot) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$; chaque fois qu'on parlera de $y(t, x)$ dans l'espace de l'energie, on considérera le couple $\left(y(t, x), \frac{\partial y}{\partial t}(t, x)\right)$.

Dans ce travail nous examinons l'équation hyperbolique non linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) + \beta(u(t, x)) + \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \ni f(t, x) \tag{1.1}$$

$$\text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [0, T] \times \Omega\,, \alpha \geq 0$$

où $f(t, x) \in \mathcal{L}^2(0, T\ ; \mathcal{L}^2(\Omega))$, avec la condition

$$u(t, x)|_\Gamma = 0 \qquad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [0, T]. \tag{1.2}$$

Dans le cas $\alpha = 0$, l'équation (1.1) avec la condition (1.2) est importante en mecanique quantique et le problème de Cauchy pour (1.1)-(1.2) a été etudié par plusieurs auteurs dans le cas où β est une fonction continue avec une croissance polynomiale d'ordre suitable ([3], [4], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]).

Récemment H. Brézis, [1], a donné un théorème d'existence dans le cas où $D(\beta) = \mathbf{R}$. Notre but est, étant donné le resultat de Brézis, donner, en supposant en plus $\alpha > 0$, un théorème d'existence pour le problème périodique.

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1972.

(**) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

Supposons $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ avec $j(u_0(x)) \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$ $(\beta = \partial j)$, $u_1(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$, $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $A = -\Delta$ et considérons la suivante formulation affaiblie du problème de Cauchy pour (1,1) (1,2).

$$
(1,3) \qquad \begin{aligned}
& u''(t) + Au(t) + \alpha u'(t) + \sigma(t) = f(t) \\
& \qquad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) + \mathfrak{L}^1(\Omega) \quad \text{p.p. sur } [0, T] \\
& u(0) = u_0 \quad u'(0) = u_1 \\
& u(t) \in E \quad \text{p.p. sur } [0, T] \\
& \sigma(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^1(\Omega)), \quad \sigma(t, x) \in \beta(u(t, x)) \\
& \text{p.p. dans } [0, T] \times \Omega.
\end{aligned}
$$

où $f(t) \in \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

H. Brézis, [1], a démontré le résultat suivant:

THÉORÈME 1. – *Soit* $\alpha \geq 0$; *le problème (1,3) a une solution*

$$u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0, T; E).$$

Nous examinons le problème périodique

$$
(1,4) \qquad \begin{aligned}
& u''(t) + Au(t) + \alpha u'(t) + \sigma(t) = f(t) \\
& \qquad \text{p.p. dans } H^{-1}(\Omega) + \mathfrak{L}^1(\Omega) \\
& u(t) \in E, u(t) \text{ périodique de période } T \\
& \sigma(t) \in \mathfrak{L}^1_{loc}(\mathbf{R}; \mathfrak{L}^1(\Omega)), \quad \sigma(t, x) \in \beta(u(t, x)) \\
& \text{p.p. sur } \mathbf{R} \times \Omega.
\end{aligned}
$$

où $f(t) \in \mathfrak{L}^2_{loc}(\mathbf{R}; \mathfrak{L}^2(\Omega))$ et est périodique de période T.

Nous démontrons le résultat suivant:

THÉORÈME 2. – *Soit* $\alpha > 0$; *le problème (1,4) a une solution* $u(t)$.

Le Théorème 2 est démontré par régularisation et les problèmes pour les passages à la limite sont résolus par le Lemme 1 du § 2.

Remarque 1. – De la démonstration des Théorèmes 1 et 2 ressort que dans le cas $n = 1$ les Théorèmes 1 et 2, sont encore valables si $D(\beta) = [a, b]$ a, b finis ($[a, b[$ a fini, $]a, b]$ b fini, $]a, b[$ a, b finis).

Remarque 2. – Considérons maintenant le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) + \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = f(t, x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t, x) \in \beta(u(t, x))$$

où n est la normale à Γ extérieure à Ω; si on modifie la définition de l'espace E, en posant $E = H^1(\Omega) \times \mathfrak{L}^2(\Omega)$, on peut obtenir, par les mêmes technyques de démonstration des Théorèmes 1 et 2, des résultats analogues aux Théorèmes 1 et 2.

§ 2. UN LEMME PRÉLIMINAIRE

Enonçons d'abord un lemme preliminaire qui suit du Th. 18, [1], pg. 126.

LEMME 1. – *Soit* β *un graphe maximal monotone de* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ *avec*

$$D(\beta)=\mathbf{R},$$

β_λ *sa regularisée Yoshida et* $\{v_\lambda(t,x)\}$ *une suite telle que*

$$\lim_{\lambda\to 0} v_\lambda(t,x)=v(t,x)$$

dans $\mathfrak{L}^2(0,T;\mathfrak{L}^2(\Omega))$; *soit* $\sigma_\lambda(t,x)=\beta_\lambda(v(t,x))$.

Alors $\{\sigma_\lambda(t,x)\}$ *est bornée dans* $\mathfrak{L}^1(0,T;\mathfrak{L}^1(\Omega))$ *et on peut extraire de* $\{\sigma_\lambda(t,x)\}$ *une sous-suite, que nous indiquons encore par* $\{\sigma_\lambda(t,x)\}$, *telle que*

$$\lim_{\lambda\to 0}{}^{*}\sigma_\lambda(t,x)=\sigma(t,x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(0,T;\mathfrak{L}^1(\Omega))$ *et on a* $\sigma(t,x)\in\beta(v(t,x))$ *p.p. dans* $[0,T]\times\Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRÉZIS H., *Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to non linear partial differential equations*, Proc. Symp. Madison 1971, edited by E. Zarantonello, Academic Press 1971, 101–156.

[2] BIROLI M., *Solutions bornées ou presque périodiques de l'équation non linéaire de la corde vibrante*, Note I, II, III, « Rend. Acc. Naz. Lincei », à paraitre.

[3] BRODSKY A. R., *Weak wave operators for non linear wave equation*, « Trans. Am. Math. Soc. », *96*, 237–244 (1969).

[4] JÖRGENS K., *Anfangswertproblem in Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen*, « Math. Zeit. », *77*, 295–308 (1961).

[5] LIONS J. L., *Sur les inéquations variationelles d'évolution pour les opérateurs du 2ème ordre en t*, Symposium sur les problèmes d'évolution. Ist. Naz. di Alta Matematica, Roma 1970.

[6] SHATER J., *The initial boundary values problem for a non linear hyperbolic equation in relativistic quantum mechanics*, « J. of Math. and Mech. », *16*, 27–50 (1966).

[7] SHATER J., *The existence of a global solution of the initial boundary values problem for* $\square u+u^3=f$, « Arch. for Rat. Mech. and An. », *22*, 292–307 (1966).

[8] SATTINGER D. H., *On global solution of non linear hyperbolic equations*, « Arch. for Rat. Mech. and An. », *30*, 148–172 (1968).

[9] SHIFF L. I., *Non linear meson theory of nuclear force*, I, « Ph. Rev. », *84*, 1–9 (1951).

[10] SEGAL I. E., *The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction*, « Bull. Soc. Math. France », *91*, 129–135 (1963).

[11] SEGAL I. E., *Non linear relativistic partial differential equations*, « Proc. Int. Congress Math. », 681–690. Moscou (1966).

[12] SEGAL I. E., *Non linear quantum processes and automorphism groups of c*-algebras*, « Proc. Int. Congress. Math. », 2 vol., 419–426. Nice 1970.