Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Lenzi

Sull'immersione dì un anello in un anello unitario

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.5, p. 342–348.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_5_342_0>

Algebra. — *Sull'immersione di un anello in un anello unitario.* Nota di DOMENICO LENZI (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper a method is introduced, which appears preferable to the classical one, for the embedding of a ring A into a unitary ring. The method is of course in particular efficacious when A is already by itself unitary or when it may be embedded in a field. The idea is due to the following consideration: if a ring is not unitary, it often has elements which behave like integers; they are the "interi virtuali" introduced here in Definition 2 and by means of which the aim is achieved.

1. INTRODUZIONE

Dato un anello $A(+,\cdot)$, esso può essere immerso in un anello unitario nel modo ben noto che inizialmente consiste nel considerare l'anello degli interi $Z(+,\cdot)$ e nel costruire il prodotto cartesiano $A\times Z$. Successivamente $A\times Z$ viene opportunamente strutturato in maniera tale che, dati (a, m), $(b, n) \in A\times Z$, si ha (cfr. [2], pag. 286):

$$(a, m) + (b, n) = (a + b, m + n),$$

$$(a, m)(b, n) = (ab + na + mb, m\cdot n).$$

In tal modo $A\times Z$ diventa un anello unitario, la sua unità è l'elemento $(0, 1)$ ed $A(+,\cdot)$ risulta isomorfo al sottanello di $A\times Z(+,\cdot)$ costituito dagli elementi del tipo $(a, 0)$.

Tale tipo di immersione, però, non è esente da critiche. Vi sono infatti anelli per i quali esiste un'immersione «naturale» in un anello unitario; basti pensare ad anelli che sono già di per sé unitari, oppure ad un anello A immergibile in un corpo O, più in generale, in un anello unitario A' in cui qualche elemento $a \in A$ ammette inverso.

In questi casi l'immersione di cui all'inizio non è quella «naturale», anzi si rivela piuttosto artificiosa rispetto ad essa. Ci proponiamo quindi di fornire un metodo di immersione di un anello $A(+,\cdot)$ in un anello unitario $A'(+,\cdot)$, in maniera tale che $A'(+,\cdot)$ sia il più naturale (in un senso che risulterà chiaro nel seguito) ampliamento unitario di $A(+,\cdot)$. Tale immersione si basa essenzialmente sul concetto di «intero virtuale» che viene introdotto con la Definizione 2.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 novembre 1972.

2. INTERI VIRTUALI

Sia dato un anello $A(+,\cdot)$ qualsiasi.

DEFINIZIONE 1. Un elemento appartenente ad A lo diciamo un « A–intero » se esiste $n \in Z$ tale che $a \cdot b = b \cdot a = nb$ per ogni $b \in A$; se $n \neq 0$ parliamo di « A–intero proprio ».

PROPOSIZIONE 1. *Se l'anello* $A(+,\cdot)$ *ammette un « A–intero proprio » esistono* $a' \in A$ *ed* $n' \in N - \{0\}$ *tali che* $a' \cdot b = b \cdot a' = n' b$ *per ogni* $b \in A$.

Dimostrazione. Ovvia.

L'A–intero a' di cui alla proposizione precedente lo diremo « di tipo positivo »; in tal caso chiameremo grado di a' (in simboli $gr(a')$) il più piccolo intero positivo m tale che $a' \cdot b = mb$ per ogni $b \in A$. Infine un A–intero di tipo positivo lo diremo « minimale » se il suo grado è minimo nell'insieme dei gradi degli A–interi di tipo positivo. È facile verificare che se a è un A–intero minimale e b un qualsiasi elemento di A, b è un A–intero minimale se e soltanto se l'elemento $a - b$ appartiene all'ideale H degli annullatori (bilateri) di A. Pertanto, se $H = \{0\}$, esiste al più un A–intero minimale.

TEOREMA 1. *Se l'A–intero* a *ed* $n \in Z$ *sono tali che* $a \cdot b = b \cdot a = nb$ *per ogni* $b \in A$, n *è multiplo del grado* m *di un qualsiasi A–intero minimale* a'.

Dimostrazione. Essendo ovviamente $m \neq 0$, si ha $n = q \cdot m + r$, con $0 \leq r < m$. Considerato allora l'elemento $a - qa'$ si ha che $(a - qa') \cdot b = nb - qmb = (n - qm) b = rb$ per ogni $b \in A$, onde $r = 0$. C.V.D.

Si verifica poi immediatamente la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Se* a *è un A–intero, l'insieme dei multipli interi di* a *è un sottoanello abeliano di* $A(+,\cdot)$.

Abbiamo ora la

PROPOSIZIONE 3. *L'insieme degli A–interi costituisce un sottoanello (abeliano) di* $A(+,\cdot)$.

Dimostrazione. È immediato provare che se a ed a' sono degli A–interi anche $a - a'$ è un A–intero. Ne consegue intanto che l'insieme in questione è un sottogruppo di $A(+)$. Alla luce di ciò si ha che $a \cdot a' = na'$ è un A–intero, d'onde la tesi. C.V.D.

TEOREMA 2. *Condizione (ovviamente necessaria e) sufficiente perché un anello* $A(+,\cdot)$ *con un A–intero proprio* a *abbia caratteristica positiva è che* a *sia ciclico* [1].

(1) Per caratteristica di A intendiamo il più piccolo intero positivo c (supposto che esista) tale che $cx = 0$ per ogni $x \in A$; diversamente si dice che la caratteristica di A è lo zero (cfr. [1], pag. 88). In accordo con tale definizione, se l'anello A è costituito dal solo 0, esso ha caratteristica eguale ad 1.

Dimostrazione. Sia p il periodo di a; si ha allora $0 = (pa) \cdot b = p(ab) = p(nb) = (pn) b$ pei ogni $b \in A$, d'onde la tesi.

TEOREMA 3. *Condizione necessaria e sufficiente perché un anello* $A(+,\cdot)$ *abbia caratteristica positiva è che ogni suo annullatore sia un* A–*intero proprio.*

Dimostrazione. Ovvia.

TEOREMA 4. *Se l'anello* $A(+,\cdot)$ *ammette un* A–*intero proprio, l'ideale* $H(+,\cdot)$ *degli annullatori di* $A(+,\cdot)$ *ha caratteristica positiva ed essa è un divisore del grado di un qualsiasi* A–*intero minimale.*

Dimostrazione. Sia a un A–intero minimale e sia $m = gr(a)$; allora per ogni $h \in H$ si ha $mh = a \cdot h = 0$, d'onde la tesi.

Nota Bene. Si possono dare innumerevoli, e tutti abbastanza ovvi, esempi di anelli dotati di elementi che si comportano come se fossero degli interi non nulli. D'altro canto ci sono anche esempi di anelli in cui ciò non accade: basta infatti prendere il sottoanello di $Z[X]$ costituito dai polinomi in cui sia nullo il monomio di grado zero.

L'esistenza in un anello $A(+,\cdot)$ di A–interi lascia presagire che l'immersione di $A(+,\cdot)$ in un anello unitario si possa fare in maniera più parsimoniosa, sfruttando almeno in parte gli elementi di A che si comportano come interi. Infatti si potrebbe scegliere un A–intero minimale a', considerarne tutti i multipli secondo gli interi relativi ed ampliare $A(+,\cdot)$ con un anello unitario $B(+,\cdot)$ in cui i multipli di cui sopra risultino multipli dell'unità.

Quanto detto or ora è senz'altro realizzabile e può effettuarsi in maniera simile a quella seguita nel metodo di immersione che si vedrà nel Teor. 6. Questa maniera di procedere, però, conferisce al prescelto A–intero minimale a' un privilegio non del tutto giustificato rispetto ad altri eventuali A–interi minimali.

D'altro canto, detta c la caratteristica positiva dell'ideale degli annullatori di A (v. Teor. 4), il multiplo secondo c di un qualsiasi A–intero minimale è sempre lo stesso; infatti, detti a ed a' due A–interi minimali, si sa già che $a - a'$ è un annullatore di A, ragion per cui $c(a - a') = 0$, onde $ca = ca'$. Quanto detto or ora prova l'esistenza in A di elementi «naturalmente privilegiati»; acquista perciò significato la seguente

DEFINIZIONE 2. Un A–intero b è detto un «intero virtuale» se esiste $n \in Z$ tale che $na' = b$ qualunque sia l'A–intero minimale a'.

Osservazione. È immediato rendersi conto che gli interi virtuali di $A(+,\cdot)$ sono tutti e soli gli elementi di A del tipo $k \cdot c \cdot a'$, con $k \in Z$, con a' A–intero minimale qualsiasi e con c caratteristica dell'ideale degli annullatori di $A(+,\cdot)$; essi costituiscono, quindi, un sottoanello di $A(+,\cdot)$. È anche da osservare che qualora esista un solo A–intero minimale (onde $H = \{0\}$) le nozioni di A–intero e di intero virtuale coincidono (cfr. Teor. 9).

3. IMMERSIONE

TEOREMA 5. *Sia* A $(+, \cdot)$ *un anello dotato di* A*–interi propri, sia* a' *un qualunque* A*–intero minimale, sia* c *la caratteristica dell'ideale* H *degli annullatori di* A, *sia* b *l'intero virtuale* ca' *e sia* $gr(b) = p$. *Considerato l'ampliamento unitario* $A \times Z (+, \cdot)$, *l'insieme* S *degli elementi di* $A \times Z$ *del tipo* $(lb, -lp)$, *con* $l \in Z$, *risulta essere un ideale bilatero di* $A \times Z (+, \cdot)$.

Dimostrazione. Dati $(lb, -lp)$, $(l'b, -l'p) \in S$ si ha che $(lb, -lp) - (l'b, -l'p) = ((l-l')b, -(l-l')p) \in S$, onde S è un sottogruppo di $A \times Z (+)$. Dati inoltre $(lb, -lp) \in S$ ed $(x, n) \in A \times Z$ si ha $(x, n) \cdot (lb, -lp) = (lb, -lp) \cdot (x, n) = (lbx - lpx + nlb, -nlp) = (nlb, -nlp) \in S$, d'onde la tesi. C.V.D.

TEOREMA 6. *Sia* A $(+, \cdot)$ *un anello; sia inoltre* S *l'ideale indicato nel Teor.* 5 *nel caso che* A $(+, \cdot)$ *abbia un* A*–intero proprio, sia invece* S *l'ideale nullo nel caso contrario. Allora l'anello* A $(+, \cdot)$ *risulta immerso nell'anello unitario* $\frac{A \times Z}{S} (+, \cdot)$ *dall'applicazione che associa ad ogni elemento* $x \in A$, *l'elemento* $[x, 0] = (x, 0) + S \in \frac{A \times Z}{S}$. *Inoltre, nel caso in cui* $S \neq \{0\}$, *se* $v = kb$ (*con* $k \in Z$) *si ha che* $[v, 0] = [0, kp]$, *dove* $p = gr(b)$.

Dimostrazione. Se $S = \{0\}$ l'asserto è banale; supponiamo quindi $S \neq \{0\}$. In tal caso l'applicazione in questione è un omomorfismo in quanto risulta chiaramente dalla composizione del monomorfismo naturale di A $(+, \cdot)$ in $A \times Z (+, \cdot)$ e dell'epimorfismo canonico di $A \times Z (+, \cdot)$ su $\frac{A \times Z}{S} (+, \cdot)$. Proviamo ora che si tratta di un isomorfismo. Infatti se $x \in A - \{0\}$ si ha che x può essere multiplo di b rispetto ad un elemento $l \in Z$ solo se $l \neq 0$; ne discende che $-lp \neq 0$. Da ciò segue che $(x, 0) \notin S$ e quindi $[x, 0] \neq [0, 0]$, d'onde la tesi. Per la seconda parte basta osservare che $(v, 0) - (0, kp) = (v, -kp) = (kb, -kp) \in S$. C.V.D.

TEOREMA 7. *Dati gli anelli* A $(+, \cdot)$ *ed* $A^* (+, \cdot)$ *ed un isomorfismo tra loro, tale isomorfismo si può prolungare in un isomorfismo tra* $\frac{A \times Z}{S} (+, \cdot)$ *ed* $\frac{A^* \times Z}{S^*} (+, \cdot)$ (*con ovvio significato per i simboli*). *In particolare ogni automorfismo di un anello* A $(+, \cdot)$ *si può prolungare in un automorfismo di* $\frac{A \times Z}{S} (+, \cdot)$.

Dimostrazione. Ovvia.

TEOREMA 8. *Sia dato un anello* A $(+, \cdot)$ *privo di annullatori diversi da zero, sia inoltre* $\bar{c}$ *la caratteristica di* A. *Allora, con riferimento alle notazioni del Teor.* 6, *risulta* $[0, k\bar{c}] = [0, 0]$, *qualunque sia* $k \in Z$.

Dimostrazione. Se la caratteristica $\bar{c}$ di A è 0, il Teorema è banalmente vero. Sia allora $\bar{c} \neq 0$. In tal caso lo 0 è un A–intero proprio di tipo positivo, per cui, detto a' l'unico A–intero minimale e posto $m = gr(a')$, si ha $\bar{c} = gr(0) = q \cdot m$ (v. Teor. 1).

Allora $[0, \bar{c}] = [0, qm] = [qa', 0]$; e poiché per ogni $x \in A$ si ha $qa' \cdot x = q(a' \cdot x) = q(mx) = (qm)x = \bar{c}x = 0$, se ne ricava che $q \cdot a' = 0$, essendo $q \cdot a'$ un annullatore. Quindi $[0, \bar{c}] = [q \cdot a', 0] = [0, 0]$, d'onde la tesi. C.V.D.

TEOREMA 9. *Se* $A(+,\cdot)$ *è un anello privo di annullatori diversi da* 0, *ogni* A*–intero è un intero virtuale.*

Dimostrazione. Riferendoci alle notazioni ed alla dimostrazione del Teorema 1, abbiamo che $a - qa'$ è un annullatore, onde $a = qa'$ ed a è un intero virtuale.

TEOREMA 10. *Sia* A *un anello che risulti sottoanello di un anello* B *con unità*, u, *e tale che esista un* $d \in A$ *dotato in* B *di inverso* d'. *Allora l'anello* $A' = \frac{A \times Z}{S}$ *del Teor. 6 risulta isomorfo al sottoanello* $\bar{A}$ *di* B *che è generato da* $A \cup \{u\}$.

Dimostrazione. Riferendoci alle notazioni del Teorema 5, si ha che $c = 1$ in quanto lo 0 è l'unico annullatore di A. Allora se $S \neq \{0\}$ risulta $gr(a') = gr(b) = m$; dato quindi $[t, n] \in A'$, consideriamo l'applicazione che ad esso fa corrispondere $t + nu \in \bar{A}$. L'applicazione è ben posta in quanto, se rappresentiamo $[t, n]$ mediante $(t + la', n - lm)$, onde $[t, n] = [t + la', n - lm]$, si ha che $t + la' + (n - lm)u = t + la' + nu - l(md)d' = t + la' + nu - l(a'd)d' = t + la' + nu - la' = t + nu$.

L'applicazione in questione è chiaramente un omomorfismo; inoltre, se $0 = t + nu \in \bar{A}$, allora qualunque sia $g \in A$, $tg + ng = 0$, onde $tg = -ng$; ne segue che t è un intero virtuale di A [(2)]. Dovrà perciò essere $t = la'$, con $l \in Z$, onde $0 = tg + ng = la'g + ng = (lm + n)g$, quindi $lm + n$ è un multiplo della caratteristica $\bar{c}$ di A, ne consegue che $[t, n] = [la', n] = [0, lm + n] = [0, 0]$ (v. Teor. 8), ed il nucleo dell'applicazione in questione è costituito dal solo $[0, 0]$, d'onde l'asserto.

Se invece $S = \{0\}$, $\frac{A \times Z}{S}$ è isomorfo ad $A \times Z$, per cui basta dimostrare che $A \times Z$ è isomorfo ad $\bar{A}$. Quanto detto si può provare considerando l'applicazione che ad ogni elemento $(t, n) \in A \times Z$ associa $t + nu \in \bar{A}$ ed osservando innanzitutto che essa risulta essere un epimorfismo; dopodiché basta far vedere che il nucleo di tale epimorfismo è costituito soltanto da $(0, 0)$, il che è vero dal momento che se $0 = t + nu \in \bar{A}$ si vede, come per il caso precedente,

(2) Si noti che, essendo d semplificabile in $\bar{A}(+,\cdot)$, esso è semplificabile anche in $A(+,\cdot)$, che non può quindi avere annullatori diversi da zero; il Teor. 9 assicura perciò che t, essendo chiaramente un A–intero, è un intero virtuale.

che per ogni $g \in A$ si ha $tg = -ng$, onde $t = 0$ e $-n = 0$ in quanto, in questo secondo caso, A è privo di A–interi propri.

COROLLARIO. *Se un anello* A *è immergibile in un anello* B *con unità* u *grazie ad un monomorfismo* $f: A \to B$, *e se* $d \in A$ *è tale che* $f(d)$ *è invertibile in* B, *allora l'anello* $A' = \frac{A \times Z}{S}$ *è isomorfo al sottoanello di* B *che è generato da* $f(A) \cup \{u\}$.

Osservazione. Se l'anello $A(+,\cdot)$ ha un A–intero semplificabile b, ogni potenza b^n (con $n \in N - \{0\}$) è semplificabile. Essendo inoltre gli elementi b^n tutti centrali, allora $A(+,\cdot)$ può essere immerso nell'anello dei quozienti rispetto all'insieme moltiplicativamente chiuso costituito da detti elementi (3); da ciò si deduce facilmente che il precedente Corollario può in tal caso venire applicato.

4. CONCLUSIONE ED ESEMPI

Il Teor. 10 ed il Corollario ad esso successivo permettono di rispondere esaurientemente ai quesiti posti inizialmente. Preso infatti un anello $A(+,\cdot)$ dotato di unità u, si ha che $\frac{A \times Z}{S}(+,\cdot)$ è isomorfo ad A, in quanto A coincide col sottoanello di A generato da $A \cup \{u\}$. Se invece A è un anello immergibile in un corpo, il suddetto Corollario assicura che l'immersione suggerita è quella più naturale.

Interessanti esempi riguardanti quanto esposto nel presente lavoro possono venire ricavati facendo ricorso ad anelli che siano sottoanelli dell'anello Zp delle classi dei resti modulo un intero p. A volte, in casi del genere, si perviene a risultati che possono a prima vista sembrare insoddisfacenti; mentre in realtà, dopo un attento esame, ci si accorge che essi sono del tutto naturali. Possiamo suggerire, ad esempio, di porre $p = 6$ e di considerare il sottoanello di Z_6 costituito da $[0]_6$, $[2]_6$ e $[4]_6$. In tal caso, una considerazione superficiale della situazione potrebbe far pensare che la più naturale immersione del suddetto anello in un anello unitario sia quella che lo immerge in un anello isomorfo a Z_6. In realtà le cose non stanno così, in quanto l'anello A ha $[4]_6$ come unità ed anzi è un campo, in quanto risulta essere isomorfo a Z_3; per cui, in tal caso, l'immersione più naturale di A in un anello unitario è quella di A in se stesso o in un anello ad esso stesso isomorfo, il che viene appunto realizzato dall'immersione proposta nel presente lavoro.

Indicando invece con A il sottoanello di Z_8 costituito da $[0]_8$, $[2]_8$, $[4]_8$, $[6]_8$, si può osservare che l'ideale degli annullatori di A è costituito da $[0]_8$ e da $[4]_8$, mentre $[2]_8$ e $[6]_8$ sono i due A–interi minimali; inoltre,

(3) Basta regolarsi così come nel Teorema 17, pag. 44, di [3]. Detto Teorema tratta il caso commutativo e si riferisce a tutti gli elementi semplificabili, comunque, tenendo presente che gli elementi b^n sono centrali, tale Teorema può facilmente essere trasferito al caso presente.

come si verifica facilmente, l'anello degli interi virtuali è dato ora dall'ideale degli annullatori. Anche in questo caso si può osservare che soltanto considerazioni d'ordine psicologico, dovute alla familiarità che noi abbiamo con Z_8 così come l'abbiamo più in generale con Z_p, possono indurci a pensare che l'immersione più naturale di A in un anello unitario sia quella in Z_8. In realtà, gli elementi di A sono rappresentati nella maniera vista sopra soltanto incidentalmente e gli A–interi minimali $[2]_8$ e $[6]_8$ sono in A « strutturalmente indistinguibili », in quanto l'applicazione di A in A che lascia fissi $[0]_8$ e $[4]_8$, mentre scambia $[2]_8$ e $[6]_8$, risulta essere un automorfismo. Ebbene tale automorfismo non può essere prolungato in automorfismo su Z_8, in quanto per l'anello Z_8 esiste il solo automorfismo identico, sicché in Z_8 si ha che $[2]_8$ e $[6]_8$ vengono ad essere « strutturalmente distinti ». Ne consegue, perciò, che la situazione « paritetica » in cui si trovano $[2]_8$ e $[6]_8$ in A viene ad essere alterata in Z_8. Ciò, però, non si verifica se si usa il metodo d'immersione da noi suggerito, secondo quanto è assicurato dal Teorema 7.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. BARSOTTI, *Appunti di Algebra*. Bologna, Zanichelli, 1970.

[2] L. LOMBARDO RADICE, *Istituzioni di Algebra Astratta*. Milano, Feltrinelli, 1967.

[3] O. ZARISKI e P. SAMUEL, *Commutative Algebra*. Princeton, Van Nostrand, 1965. Vol. I.