
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIETRO CALOI

**L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. V:
Caso delle radici complesse coniugate**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 53 (1972), n.3-4, p.
295-300.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_3-4_295_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geofisica. — *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana.* —
V: *Caso delle radici complesse coniugate.* Nota (*) del Socio PIETRO CALOI.

SUMMARY. — The Rayleigh equation has real coefficients; therefore, also the case of complex conjugate roots may be explained physically. The Author proves that the Somigliana waves may be formed for Poisson ratio values up to 0,31; for gradually less rigid media, they are missing altogether and degenerate into evanescent waves.

1. — In alcune precedenti Note [1, 2, 3 e 4], ho trattato dell'interpretazione fisica delle radici dell'equazione di Rayleigh maggiori dell'unità, per quei valori del coefficiente σ di Poisson, ai quali corrispondono tre radici reali per l'equazione di Rayleigh. Ed ho provato che tali radici hanno un preciso significato fisico: consentono cioè l'interpretazione teorica di vistosi gruppi di oscillazioni sismiche, ai quali ho posto il nome di onde di Somigliana (Tav. I). Ho quindi trovato i limiti d'insorgenza delle onde di Somigliana, nell'ambito delle radici reali maggiori dell'unità, e messo in evidenza l'interesse dello studio di tali onde, nelle ricerche sulle stratificazioni costituenti la crosta terrestre.

Ma, come già osservava Somigliana nel suo terzo contributo sulla propagazione delle onde sismiche [5], a cagione dell'omogeneità delle equazioni del moto ed essendo l'equazione di Rayleigh a coefficienti reali, anche il caso delle radici complesse coniugate può essere fisicamente interpretato, con la separazione della parte reale da quella immaginaria delle radici stesse.

È quanto mi propongo di fare in quanto segue.

2. — Innanzi tutto, vediamo di trovare, per via analitica, il valore di σ che separa il campo reale, per le radici maggiori dell'unità, da quello complesso; valore già empiricamente ottenuto nella precedente Nota [4].

È noto che, nella sua forma più conosciuta, l'equazione di Rayleigh si scrive — con l'abituale significato dei simboli [1] —

$$\left(2 - \frac{v_3^2}{v_2^2}\right)^4 = 16 \left(1 - \frac{v_3^2}{v_1^2}\right) \left(1 - \frac{v_3^2}{v_2^2}\right);$$

da cui, fatto [1]

$$v_3^2 = \chi v_2^2,$$

consegue

$$(1) \quad \chi^3 - 8\chi^2 + 8\left(3 - 2\frac{v_2^2}{v_1^2}\right)\chi - 16\left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right) = 0.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1972.

Ricordando che $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}$, poniamo

$$\varepsilon = 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{1}{2(1-\sigma)};$$

la (1) diviene allora

$$(2) \quad \chi^3 - 8\chi^2 + 8(1+2\varepsilon)\chi - 16\varepsilon = 0.$$

Vediamo come variano le radici di questa equazione, quando σ varia fra 0 e 1/2, cioè per

$$\frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq 1.$$

Liberiamo la (2) dal termine di secondo grado in χ . A questo scopo, poniamo

$$\chi = \delta + \frac{8}{3}.$$

La (2) diviene allora

$$\delta^3 + \frac{8}{3}(6\varepsilon - 5)\delta + \frac{16}{3}\left(5\varepsilon - \frac{28}{9}\right) = 0.$$

Facciamo

$$\frac{8}{3}(6\varepsilon - 5) = p \quad ; \quad \frac{16}{3}\left(5\varepsilon - \frac{28}{9}\right) = q.$$

Avremo

$$(3) \quad \delta^3 + p\delta + q = 0.$$

Se p e q sono reali, dall'Analisi matematica sappiamo che la condizione affinché le tre radici della (3) siano reali, si traduce nella relazione

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0.$$

Tenuto conto dei valori di p e di q , nel nostro caso abbiamo

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{4^3}{3^6} [(45\varepsilon - 28)^2 + (12\varepsilon - 10)^3].$$

Dovrà quindi essere per la realtà delle radici

$$\Delta(\varepsilon) = (45\varepsilon - 28)^2 + (12\varepsilon - 10)^3 \leq 0.$$

Si trova facilmente che il valore di ε che annulla $\Delta(\varepsilon)$ è

$$\varepsilon = 0,6785.$$

E poichè

$$\sigma = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon},$$

ne segue

$$\sigma = 0,26308,$$

che praticamente coincide con il valore ottenuto in precedenza ($\sigma = 0,26305$). È in corrispondenza di questo valore che le due radici maggiori dell'unità dell'equazione di Rayleigh coincidono; si ha infatti $\chi_{2,3} = 3,5754$ [4].

Quindi, per avere una radice reale maggiore dell'unità e due radici complesse coniugate, dev'essere

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

e ad esse corrisponderà per σ il campo di variabilità

$$0,26305 < \sigma \leq 0,5.$$

3. - Restava ora da calcolare una serie di coppie di radici complesse coniugate, per valori di σ compresi entro i limiti sopra riportati.

I calcoli sono stati condotti per i seguenti valori di σ : 0,265; 0,27; 0,3; 0,305; 0,35; 0,4; 0,5.

Le equazioni di Rayleigh relative ai valori di σ sopra riportati, sono:

per $\sigma = 0,265$	$3,1277 \chi^3 - 25,022 \chi^2 + 59,065 \chi - 34,043 = 0,$
per $\sigma = 0,27$	$3,1739 \chi^3 - 25,391 \chi^2 + 60,174 \chi - 34,782 = 0,$
per $\sigma = 0,3$	$3,5 \chi^3 - 28,0 \chi^2 + 68,0 \chi - 40 = 0,$
per $\sigma = 0,305$	$3,564 \chi^3 - 28,512 \chi^2 + 69,536 \chi - 41,024 = 0,$
per $\sigma = 0,35$	$4,333 \chi^3 - 34,66 \chi^2 + 88,0 \chi - 53,33 = 0,$
per $\sigma = 0,4$	$3 \chi^3 - 24 \chi^2 + 64 \chi - 40 = 0,$
per $\sigma = 0,5$	$\chi^3 - 8 \chi^2 + 24 \chi - 16 = 0.$

Le corrispondenti radici sono

σ	0,265	0,27	0,3	0,305
χ_1 . . .	0,8498	0,85125	0,86009	0,86154
$\chi_{2,3}$. . .	$3,5752 \pm i 0,1622$	$3,5743 \pm i 0,3120$	$3,5714 \pm i 0,7284$	$3,5690 \pm i 0,7896$
σ	0,35	0,4	0,5	
χ_1 . . .	0,8740	0,8877	0,9128	
$\chi_{2,3}$. . .	$3,5625 \pm i 1,1791$	$3,5562 \pm i 1,5406$	$3,5436 \pm i 2,2302$	

4. - Mi sono chiesto se tutti i valori di σ , nell'intervallo $0,26305 \div 0,5$, conducono a radici, cui corrispondono onde di Somigliana. Tali radici sono complesse coniugate ed alcuni dei loro valori sono stati riportati al n. 3. Sono complessi pertanto anche i valori di $[1, 2]$

$$v_3 = v_2 \sqrt{\chi} \quad , \quad \tan^2 e_1 = \frac{v_2^2}{v_1^2} \chi - 1 \quad , \quad \tan^2 e_2 = \chi - 1.$$

Indichiamo una generica radice complessa come segue

$$\chi_{2,3} = r + ic.$$

Le formule precedenti si scriveranno allora

$$\tan^2 e_1 = r \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 + ic \frac{v_2^2}{v_1^2} \quad , \quad \tan^2 e_2 = r - 1 + ic \quad , \quad v_3 = v_2 \sqrt{r + ic}.$$

La relazione

$$R + iC = \sqrt{r + ic},$$

consente di ottenere

$$R = \left(\frac{\sqrt{r^2 + c^2} + r}{2} \right)^{1/2} \quad , \quad C = \left(\frac{\sqrt{r^2 + c^2} - r}{2} \right)^{1/2}.$$

Assegnato il valore di σ , compreso nell'intervallo sopra indicato, l'equazione di Rayleigh fornisce la corrispondente coppia di radici complesse coniugate. Si ottengono così r e c , e quindi, $\tan e_1$, $\tan e_2$ e v_3 , relativi al valore di σ prescelto.

Separata la parte reale dall'immaginaria, potremo così pervenire ai valori reali di e_1 (se esistono), di e_2 e di v_3 . Indicheremo quest'ultimo con

$$v'_3 = v_2 R,$$

mentre porremo

$$v_3 = v_2 C,$$

dove per C va preso il valore negativo.

Sulla base dei valori di r e c tratti dalla precedente Tabella, avremo, al variare di σ :

σ	0,265	0,27	0,3	0,305	0,35	0,4	0,5
$\frac{v_2^2}{v_1^2} \dots \dots \dots$	0,31973	0,31507	0,2857	0,2805	0,23077	0,16667	0
$\tan^2 e_1 \dots \dots$	0,14310	0,12615	0,02035	0,0011045	-0,1779	-0,4073	-1
$e_1 \dots \dots \dots$	20° 43' 25	19° 33'	8° 7'	1° 51'	—	—	—
$\tan^2 e_2 \dots \dots$	2,5752	2,5743	2,5714	2,5690	2,5625	2,5562	2,5436
$e_2 \dots \dots \dots$	58° 4' 25	58° 4'	58° 3'	58° 2'	58° 0'	57° 58' 5	57° 55'
$R \dots \dots \dots$	1,8913	1,8924	1,8995	1,9006	1,9125	1,9277	1,96605

Dall'analisi della Tabella, consegue che le onde di Somigliana possono verificarsi per valori di σ fino 0,31; per mezzi via via meno rigidi, esse vengono a mancare e degenerano in onde trasversali ordinarie. I valori degli angoli efficaci, per incidenza longitudinale, presuppongono incidenze che si approssimano rapidamente all'angolo retto. Per incidenza trasversale, gli angoli efficaci crescono lievissimamente al diminuire della rigidità del mezzo, per raggiungere un angolo d'incidenza limite di 32° circa; angolo a cui corrisponde la riflessione totale [6].

Prendendo in considerazione anche le radici complesse coniugate dell'equazione di Rayleigh, gli angoli efficaci per la formazione delle onde di Somigliana, sono quelli corrispondenti a radici per il seguente campo di variabilità di σ :

$$0 < \sigma < 0,31,$$

sebbene, in pratica [4], esso si riduca a

$$0,25 < \sigma < 0,31.$$

In ogni caso, l'uso delle radici complesse coniugate, rivela un allargamento e il limite del campo di variabilità del coefficiente di Poisson.

Per quanto concerne la velocità di propagazione delle onde di Somigliana (quando esistono), si nota che essa cresce al crescere di σ (cioè, al diminuire della rigidità) e raggiunge il valore massimo

$$v'_3 = 1,9006 \cdot v_2,$$

per il valore limite di $\sigma = 0,305$.

Se nelle espressioni di u_1, u_2, w_1, w_2 [4] mettiamo $\Phi(x - v_3 t)$ sotto forma di potenza

$$\Phi(x - v_3 t) = e^{ip(x - v_3 t)},$$

osservando che $v_3 = v'_3 + i\nu_3$, avremo

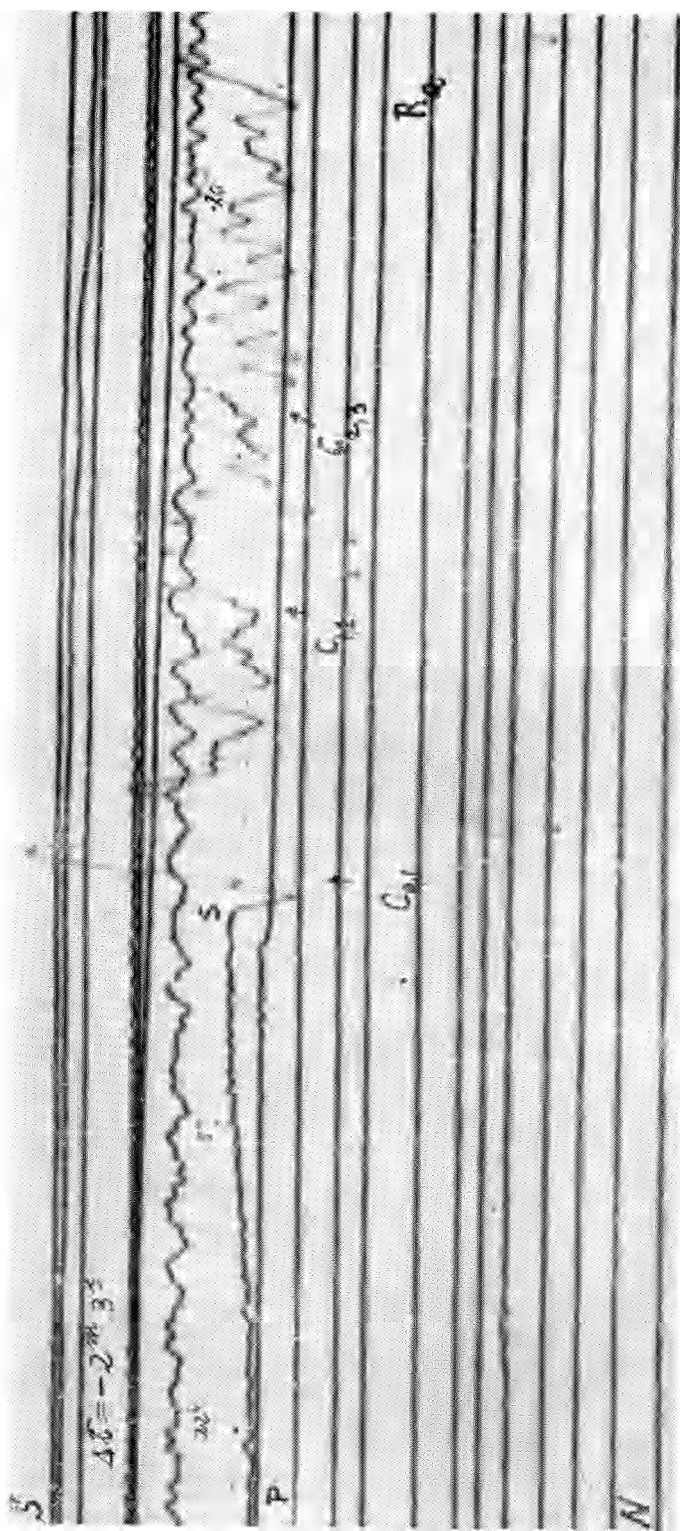
$$\Phi[x - (v'_3 + i\nu_3)t] = e^{ip(x - v'_3 t)} \cdot e^{p\nu_3 t},$$

dove p denota la pulsazione dell'oscillazione e ν_3 è una costante negativa, che può considerarsi come il coefficiente di estinzione dell'oscillazione nel tempo.

Per $\sigma = 0,265$ è, per esempio, $\nu_3 = -0,0430 \cdot v_2$, per $\sigma = 0,27$ è $\nu_3 = -0,0828 \cdot v_2$; mentre per $\sigma = 0,305$, si ha $\nu_3 = -0,2076 \cdot v_2$. A parità di frequenza quindi, nella propagazione l'onda di Somigliana si estingue più rapidamente al decrescere della rigidità.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. I: La teoria delle onde di Rayleigh*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei, Classe Scienze fis., mat. e nat.», ser. VIII, 41 (1-2 Ferie) (1966).
- [2] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. II: La teoria di Somigliana: rettifiche, conseguenze*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei, Classe Scienze fis., mat. e nat.», ser. VIII, 41 (5) (1966).
- [3] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. III: Le $C_{i,j}$ sono onde di Somigliana. Loro importanza per lo studio della crosta terrestre*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei, Classe Scienze fis., mat. e nat.», 43 (6) (1967).
- [4] P. CALOI, *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. IV: Limiti d'insorgenza delle onde di Somigliana: loro esclusiva formazione nel piano principale*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei, Classe Scienze fis., mat. e nat.», ser. VIII, 46 (1) (1969).
- [5] C. SOMIGLIANA, *Sulla propagazione delle onde sismiche. Nota III*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei, Classe Scienze fis., mat. e nat.», ser. V, 27 (1) (1918).
- [6] P. CALOI, *From the Somigliana waves to the evanescent waves*, «Annali di Geofisica». (In corso di stampa).



Esempi di onde $C_{0.1}$ ($T = 68^s$), $C_{1.2}$ ($T = 34^s$) e $C_{2.3}$ ($T = 23^s$) - dall'Autore genericamente indicate come onde di Somigliana - registrate a Somplago (Lago di Cavazzo) da un sismografo con periodo proprio di 120^s circa (a registrazione ottica diretta), in occasione del terremoto di Sitka (Alaska) del 30 Luglio 1972, alla distanza epicentrale di 8.300 km circa.