Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andrea Donato, Tommaso Ruggeri

Onde di discontinuità e condizioni dì eccezionalità per materiali ferromagnetici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.3-4, p. 288–294.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_3-4_288_0>

Fisica matematica. — *Onde di discontinuità e condizioni di eccezionalità per materiali ferromagnetici.* Nota (*) di ANDREA DONATO e TOMMASO RUGGERI (**), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We studied the propagation of first-order electromagnetic discontinuities through ferromagnetic materials whose magnetic permeability is a function of H^2. We examined the condition for a discontinuity-wave not to generate a shock-wave (exceptionality conditions of Lax–Boillat). We found that the system is never fully exceptional, unless in the plane wave case, if one supposes $H_t = 0$, or for $H_n = 0$ with materials whose magnetic permeability solves a suitable differential equation.

G. Boillat [1], riprendendo e generalizzando una definizione di Lax [2], chiama eccezionali quelle onde di discontinuità che non generano onde d'urto e ne stabilisce le condizioni analitiche (che presuppongono la sola conoscenza delle velocità di propagazione e delle discontinuità) affinchè esse si verifichino. Qualora tutte le possibili onde possiedano tale eccezionalità, il sistema delle equazioni di campo vien detto completamente eccezionale.

La teoria della propagazione di onde ordinarie di discontinuità in mezzi non lineari è stata presa in considerazione da vari Autori (vedi ad esempio [3], [4] e [5]). Ci è sembrato interessante riesaminare il problema per i materiali ferromagnetici, senza fare alcuna ipotesi restrittiva sulla superficie d'onda, allo scopo di ricercare eventuali onde eccezionali.

Si deducono le possibili velocità di propagazione e i vettori caratteristici delle discontinuità e si dimostra che, in generale, una sola onda risulta eccezionale. Allorchè si considerano onde piane, il sistema risulta completamente eccezionale per $H_t = 0$ (componente tangenziale del campo magnetico), oppure per $H_n = 0$ se la permeabilità magnetica μ, pensata funzione di H^2, è soluzione di una certa equazione differenziale.

1. – PREMESSE GENERALI

Le equazioni di Maxwell per i materiali ferromagnetici isotropi con isteresi trascurabili sono (1)

$$(1)\ \begin{cases} \dot{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot}\mathbf{E} \\ \dot{\mathbf{D}} = \operatorname{rot}\mathbf{H} \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} \mathbf{B} = \mu(H^2)\mathbf{H} \\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 settembre 1972.

(**) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria, presso l'Istituto Matematico dell'Università di Messina.

(1) Non si tiene conto della conducibilità elettrica in quanto essa non influisce sulle discontinuità.

dove si suppone, seguendo il Graffi [6], che la permeabilità magnetica soddisfi alle seguenti condizioni:

$$(3') \qquad \mu > 0 \quad , \quad \mu + 2\mu' H^2 > 0 \qquad \left(\mu' = \frac{d\mu}{dH^2}\right).$$

Le (1) e (2), dopo aver tenuto conto delle (3), diventano:

$$(4) \qquad \begin{cases} 2\mu'(\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{H}})\,\mathbf{H} + \mu\dot{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot}\mathbf{E} \\ \varepsilon\dot{\mathbf{E}} = \operatorname{rot}\mathbf{H} \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \mu' \operatorname{grad} H^2 \cdot \mathbf{H} + \mu \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0\,. \end{cases}$$

Si suppone inoltre che μ, μ', $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{E}$ siano funzioni continue dei loro argomenti, mentre le derivate prime di $\mathbf{H}$ e di $\mathbf{E}$ presentino una discontinuità attraverso la superficie Σ di equazione:

$$\varphi(x^\alpha) = 0 \qquad [(\alpha = 0, 1, 2, 3),\ x^0 = t]\,.$$

Useremo il simbolo

$$[\ \ ] = (\ \ )_{\varphi+0} - (\ \ )_{\varphi-0}$$

porremo inoltre:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad}\varphi}{|\operatorname{grad}\varphi|} \quad , \quad -\lambda = \frac{\dot{\varphi}}{|\operatorname{grad}\varphi|} \quad , \quad \delta\boldsymbol{v} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial\varphi}\right]$$

e

$$(6) \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \lambda\boldsymbol{n} + \frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{n}} - \left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\boldsymbol{n}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale alla superficie Σ, λ è la velocità scalare normale di avanzamento, $\delta\boldsymbol{v}$ è il vettore caratteristico della discontinuità, mentre $\boldsymbol{\Lambda}$ rappresenta la velocità radiale.

È opportuno, per il seguito, introdurre due enti vettoriali $\boldsymbol{d}$ e $\nabla\lambda$ aventi ciascuno sei componenti, precisamente: $\boldsymbol{d}$ ha le prime tre componenti coincidenti con quelle di $\delta\mathbf{H}$ e le seconde con quelle di $\delta\mathbf{E}$; $\nabla\lambda$, a sua volta, ha le prime tre componenti coincidenti con quelle di $\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{H}}$ e le seconde tre con quelle di $\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{E}}$; scriveremo formalmente:

$$\boldsymbol{d} \equiv \begin{pmatrix}\delta\mathbf{H}\\ \delta\mathbf{E}\end{pmatrix} \quad , \quad \nabla\lambda \equiv \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{H}}\,,\,\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{E}}\right).$$

2. – EQUAZIONI PER LE DISCONTINUITÀ

Tenendo conto delle posizioni fatte in precedenza, le equazioni per le discontinuità si ricavano, come è noto, da (4) e (5) effettuando la trasformazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\lambda\delta \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \to n_i\,\delta$$

ottenendo in tal modo:

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda\{2\mu'(\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H})\,\mathbf{H}+\mu\delta\mathbf{H}\}=\boldsymbol{n}\wedge\delta\mathbf{E}\\ -\varepsilon\lambda\,\delta\mathbf{E}=\boldsymbol{n}\wedge\delta\mathbf{H}\end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} 2\mu'\mathrm{H}_n\,\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{H}+\mu\boldsymbol{n}\cdot\delta\mathbf{H}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\delta\mathbf{E}=0\,.\end{cases}$$

Notiamo subito, che, a causa delle (3′) e delle (8), non si può avere $\lambda = 0$. Infatti, se fosse $\lambda = 0$ dalle (7), si avrebbe:

$$\delta\mathbf{E}=(\delta\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}\qquad \delta\mathbf{H}=(\delta\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}$$

e per le (8)

$$\delta\mathbf{E}=0\qquad (\mu+2\mu'\mathrm{H}_n^2)\,\delta\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

osservando che $\mu + 2\mu'\mathrm{H}_n^2$ è sempre positivo anche se $\mu' < 0$ per le (3′), ne segue $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{H} = 0$.

Ritenendo ormai $\lambda \neq 0$ [il che comporta che le (8) sono deducibili dalle (7)] si può ottenere, eliminando $\delta\mathbf{E}$ dalle (7), la seguente equazione in $\delta\mathbf{H}$:

$$(9)\qquad (\mathrm{A}_{ik}-\xi\delta_{ik})\,\delta\mathrm{H}_k=0$$

dove si è posto per semplicità:

$$(10)\qquad a=\varepsilon\lambda^2\mu\quad,\quad \xi=(1-a)\,\mu\quad,\quad \mathrm{A}_{ik}=2\mu'(a\mathrm{H}_i-\mathrm{H}_n n_i)\,\mathrm{H}_k\,.$$

La (9) richiede che sia nullo il Det $\|\mathrm{A}_{ik}-\xi\delta_{ik}\|$ il che equivale a dire che le ξ sono radici dell'equazione secolare:

$$(11)\qquad \xi^3-\mathrm{I}_\mathrm{A}\,\xi^2+\mathrm{II}_\mathrm{A}\,\xi-\mathrm{III}_\mathrm{A}=0$$

dove $\mathrm{I_A}$, $\mathrm{II_A}$ e $\mathrm{III_A}$ sono gli invarianti principali della matrice A.

Risulta immediato verificare che $\mathrm{I_A}=2\mu'(a\mathrm{H}^2-\mathrm{H}_n^2)$, $\mathrm{II_A}=\mathrm{III_A}=0$ e quindi le radici di (11) sono:

$$(12)\qquad \xi=0\qquad\text{(contata due volte)}$$

$$(13)\qquad \xi=\mathrm{I_A}=2\mu'(a\mathrm{H}^2-\mathrm{H}_n^2)\,.$$

In corrispondenza alle (12) e (13), se si tiene conto delle posizioni (10), si determinano i quadrati delle velocità di propagazione:

$$(14)\qquad \lambda_{(1)}^2=\frac{1}{\varepsilon\mu(\mathrm{H}^2)}$$

$$(15)\qquad \lambda_{(2)}^2=\frac{1}{\varepsilon\mu}\,\frac{\mu+2\mu'\mathrm{H}_n^2}{\mu+2\mu'\mathrm{H}^2}\,.$$

Le $\lambda_{(i)}$ per le (3′) risultano reali e finite.

In corrispondenza alle velocità $\lambda_{(1)}$ e $\lambda_{(2)}$ si hanno, rispettivamente, le seguenti velocità radiali:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(1)} = \lambda_{(1)}\,\boldsymbol{n} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{(2)} = \frac{\mu\boldsymbol{n} + 2\,\mu'\,\mathrm{H}_n\,\mathbf{H}}{\lambda_{(2)}\,\varepsilon\mu\,(\mu + 2\,\mu'\mathrm{H}^2)}\,. \tag{17}$$

Dalla (16), tenuto conto di (14), si deduce che le onde propagantesi con velocità $\lambda_{(1)}$ sono onde parallele [1].

Andiamo ora alla ricerca delle direzioni dei vettori caratteristici delle discontinuità. Dalla (9), tenendo presente la (14) si ha:

$$\delta\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\{\mu'(\mathbf{H} - \mathrm{H}_n\,\boldsymbol{n})\} = 0 \tag{18}$$

se si esclude il caso $\mu = \text{cost.}$ (teoria lineare: le due velocità coincidono) e il caso in cui $\mathbf{H} = \mathrm{H}_n\,\boldsymbol{n}$, che verrà trattato a parte nelle onde piane, segue: $\delta\mathbf{H}\cdot\mathbf{H} = 0$ e quindi dalle (8) $\boldsymbol{n}\cdot\delta\mathbf{H} = 0$. Pertanto si ha:

$$\delta\mathbf{H} = \rho\boldsymbol{n}\wedge\mathbf{H} \tag{19}$$

(poiché interessa solo la direzione di $\delta\mathbf{H}$, nel seguito porremo $\rho = 1$), mentre, se si tiene presente la (15), da (9) si ottiene, sempre a meno di un fattore di proporzionalità:

$$\delta\mathbf{H} = \nu\mathbf{H} - \mathrm{H}_n\,\boldsymbol{n} \qquad \text{dove} \quad \nu = \frac{\mu + 2\,\mu'\mathrm{H}_n^2}{\mu + 2\,\mu'\mathrm{H}^2}\,. \tag{20}$$

In corrispondenza alle (19) e (20), tenendo presente la $(7)_2$, si ottengono i vettori caratteristici $\delta\mathbf{E}$:

$$\delta\mathbf{E} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,(\mathbf{H} - \mathrm{H}_n\,\boldsymbol{n}) \quad ; \quad \delta\mathbf{E} = \pm\sqrt{\frac{\mu\nu}{\varepsilon}}\,(\boldsymbol{n}\wedge\mathbf{H})\,. \tag{21}$$

Siamo ora in grado di dare le espressioni dei vettori $\boldsymbol{d}$ e $\nabla\lambda$. Nel caso di $\lambda = \lambda_{(1)}$ si ha:

$$\boldsymbol{d}_{(1)} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}\wedge\mathbf{H} \\ \pm\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,(\mathbf{H} - \mathbf{H}_n\,\boldsymbol{n}) \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla\lambda_{(1)} \equiv \left(\pm\frac{\mu'}{\mu\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\mathbf{H}\,,\,\mathbf{0}\right)\cdot \tag{22}$$

Per $\lambda = \lambda_{(2)}$ invece:

$$\boldsymbol{d}_{(2)} \equiv \begin{pmatrix} \nu\mathbf{H} - \mathbf{H}_n\,\boldsymbol{n} \\ \pm\sqrt{\frac{\mu\nu}{\varepsilon}}\,\boldsymbol{n}\wedge\mathbf{H} \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla\lambda_{(2)} \equiv (\alpha\mathbf{H} + \beta\boldsymbol{n}\,,\,\mathbf{0}) \tag{23}$$

dove

$$\alpha = -\,\frac{2\,\mu''\mu^2\,\mathrm{H}_t^2 + 4\,\mu'^2(2\,\mu + \mu'\mathrm{H}^2)\,\mathrm{H}_n^2 + 3\,\mu^2\mu'}{\varepsilon\mu^2\,\lambda_{(2)}\,(\mu + 2\,\mu'\mathrm{H}^2)^2}$$

$$\beta = \frac{2\,\mu'\mathrm{H}_n}{\varepsilon\mu\lambda_{(2)}\,(\mu + 2\,\mu'\mathrm{H}^2)}\,.$$

3. – Condizioni di eccezionalità

La condizione d'eccezionalità si esprime nella forma [1]:

$$\nabla\lambda_{(i)} \cdot \boldsymbol{d}_{(i)} = 0 \tag{24}$$

intendendo con tale scrittura il prodotto scalare tra i due vettori a sei componenti. Se la (24) si verifica per ogni $\lambda_{(i)}$ il sistema si dice completamente eccezionale. Si osservi che la (24) asserisce la continuità delle derivate prime di $\lambda_{(i)}$, ovvero:

$$\left[\frac{\partial\lambda_{(i)}}{\partial x^\alpha}\right] = 0 .$$

Dalle (22) segue immediatamente che l'onda propagantesi con velocità $\lambda_{(1)}$ è eccezionale.

Per $\lambda = \lambda_{(2)}$ si ha:

$$\nabla\lambda_{(2)} \cdot \boldsymbol{d}_{(2)} = \frac{H_t^2}{\mu + 2\mu' H^2} (\alpha\mu - 2\beta H_n \mu') \tag{25}$$

da cui si riconosce che in generale quest'onda, a differenza della prima, non è eccezionale. A priori diventerebbe tale solo per quei materiali ferromagnetici la cui μ è una funzione che soddisfa alla seguente equazione differenziale:

$$\mu^2(2\mu'' H^2 + 3\mu') + 2 H_n^2\{6\mu'^2(\mu + \mu' H^2) - \mu^2\mu''\} = 0 . \tag{26}$$

Ricordando che μ è una funzione del modulo e non della direzione di $\mathbf{H}$ ed escludendo il caso di onde piane, segue necessariamente:

$$\begin{cases} \mu^2\mu'' = 6\mu'^2(\mu + \mu' H^2) \\ 2\mu'' H^2 + 3\mu' = 0 \end{cases} \tag{27}$$

sostituendo μ'' dedotto dalla $(27)_2$ nella $(27)_1$ si ottiene

$$\mu + 2\mu' H^2 = 0 \tag{28}$$

che è impossibile per le (3'), ne segue che queste onde possono produrre onde d'urto.

Consideriamo adesso il caso di un'onda piana ed esaminiamo a parte i casi in cui $H_t = 0$ e $H_n = 0$.

a) nel caso in cui $H_t = 0 (\mathbf{H} = \pm H\boldsymbol{n})$, le due velocità di propagazione coincidono e si ha:

$$\boldsymbol{d} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{n} \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,(w_n \boldsymbol{n} - \boldsymbol{w}) \end{pmatrix} \tag{29}$$

dove $\boldsymbol{w}$ è un arbitrario vettore non parallelo ad $\boldsymbol{n}$.

Essendo verificate le condizioni $\nabla\lambda \cdot \boldsymbol{d} = 0$ (qualsiasi sia $\boldsymbol{w}$) ne segue, in accordo con la (25), che il sistema è completamente eccezionale.

b) nel caso $H_n = 0$, mentre la velocità $\lambda_{(1)}$ rimane immutata, $\lambda_{(2)}$ assume l'aspetto

$$\lambda^2_{(2)} = 1/\varepsilon(\mu + 2\mu' H^2) \tag{30}$$

che coincide sostanzialmente con quella dedotta dalla Stagnani [3] (2).

Affinchè il sistema risulti completamente eccezionale, si deve verificare [vedi (26)]:

$$2\mu'' H^2 + 3\mu' = 0 \tag{31}$$

che comporta:

$$\mu + 2\mu' H^2 = \bar{\mu} = \text{cost.} > 0 \tag{32}$$

che ha per soluzione:

$$\mu - \bar{\mu} = \frac{C}{H} \qquad (C = \text{costante})\,. \tag{33}$$

Ricordando che:

$$\mathbf{M} = (\mu - \mu_0)\,\mathbf{H}\,, \tag{34}$$

essendo **M** il vettore intensità di magnetizzazione e μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto, e inoltre che

$$\lim_{H \to \infty} \mu = \mu_0$$

segue $\bar{\mu} = \mu_0$ e quindi:

$$\lambda^2_{(2)} = 1/\varepsilon\mu_0 \quad ; \quad M = C \qquad\qquad (C > 0)\,. \tag{35}$$

Osservando che M può ritenersi costante solo quando il materiale ferromagnetico ha raggiunto la saturazione magnetica, si può affermare che solo in queste condizioni il sistema è totalmente eccezionale (3).

(2) In [3] si suppone inoltre $\delta\mathbf{H}/\!/\mathbf{H}$ il che comporta che l'unica velocità possibile è la $\lambda_{(2)}$. Infatti, nel caso $\lambda = \lambda_{(1)}$, si ha per le (19) $\delta\mathbf{H} = \delta\mathbf{E} = 0$.

(3) In generale un'onda che si propaga in un materiale ferromagnetico è fortemente assorbita e quindi difficilmente si possono avere campi elevati. Si può tuttavia ritenere che agisca sul mezzo un campo magnetico esterno. Inoltre, come è noto, per temperature al di sotto di quella di Curie, il materiale raggiunge quasi subito la saturazione magnetica tanto da poter considerare M = costante, anche per piccoli valori del campo (vedi [7]).

Bibliografia

[1] G. Boillat, *La propagation des ondes*, Gauthier–Villars. Paris 1965.

[2] P. D. Lax, *Contributions to the theory of partial differential equations*, Princeton University Press, 1954.

[3] A. M. Stagnani, *Sulla propagazione di una discontinuità elettromagnetica, in un mezzo non lineare*, «Atti del Sem. Mat. e Fis. Modena», *13*, 91–97 (1964).

[4] L. J. F. Broer, *Wave propagation in non linear Media*, «Z. Angew. Math. Phis.», *16*, 18–32 (1965).

[5] R. Venkatarman e R. S. Rivlin, *Propagation of first–order electromagnetic discontinuities in an isotropic medium*, «Arch. Rat. Mech. and Anal.», *40* (5), 373–383 (1971).

[6] D. Graffi, *Problemi non lineari nella teoria del campo elettromagnetico*, «Acc. Naz. Sc. Lett. ed Arti, Modena», ser. VI, *9* (1967).

[7] L. Landau e E. Lifchitz, *Electrodynamique des milieux continus*, Editions MIR. Moscou 1969. Cap. V, par. 36, pag. 199.