Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Bressan

Le equazioni gravitazionali di Einstein dedotte rigorosamente postulando qualche versione relativistica delle equazioni di Poisson. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.3-4, p. 280–287.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_3-4_280_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Fisica matematica. — *Le equazioni gravitazionali di Einstein dedotte rigorosamente postulando qualche versione relativistica delle equazioni di Poisson.* Nota II [(*)] di ALDO BRESSAN, presentata dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — See the summary in Part I.

PARTE II.

DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI GRAVITAZIONALI MEDIANTE UN SOSTITUTO RELATIVISTICO DELL'EQUAZIONE DI POISSON GIUSTIFICABILE IN MODO DIRETTO E NATURALE

N. 5. – *Seconda versione di un sostituto relativistico dell'equazione di Poisson. Sua giustificazione diretta e naturale.*

In Relatività ristretta, dove la gravitazione si trascura, si assumono come equazioni fondamentali di $\mathcal{C}$ quelle di conservazione

$$T^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = 0 \tag{26}$$

ove $T_{\alpha\beta}$ – cfr. (8) – è scelto in modo che in un riferimento inerziale (x) in cui localmente la velocità di $\mathcal{C}$ sia $\ll c$ le parti spaziale e temporale di (26) differiscano di pochissimo dalle equazioni (dinamiche classiche) di Cauchy dei sistemi continui e rispettivamente dal 1° principio o equazione del bilancio energetico. Le differenze, dell'ordine di c^{-2}, riguardano principalmente le equazioni di Cauchy e in parte sono conformi al principio di equivalenza tra massa ed energia (interna, cinetica ed elettromagnetica), e tra esse vanno inclusi certi piccolissimi termini nel vettore q_α di corrente termica; in parte queste differenze consistono in termini nell'accelerazione intrinseca A_α e negli sforzi meccanici ed elettromagnetici (i quali termini si annullano per $A_\alpha = 0$). Si noti che come appare dalla (20) nel lavoro [1] sulle onde elastiche relativistiche nel caso $E_{\alpha\beta} \equiv 0 \equiv q_\alpha$, in questo caso, per un corpo elastico generico lo scalare densità di massa inerziale va sostituito con un tensore dipendente pure dagli sforzi, mentre le suddette differenze dell'ordine di c^{-2} si riducono precisamente a quelle dovute al principio d'equivalenza massa–energia solo nel caso di corpi pulverulenti, ossia incapaci di sforzi meccanici.

Più in particolare, le suddette differenze hanno luogo in modo che, tra l'altro, le equazioni relativistiche (26) – universali al pari delle corrispondenti

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1972.

equazioni classiche e dell'equazione classica di Poisson – contengano, sia pur in termini piccolissimi, quantità (quali q_α) che non figurano affatto nelle corrispondenti equazioni classiche. Allora, volendo tener conto della gravitazione, è naturale non imporre ad S_4 l'euclideità, e postularvi oltre alle (17) le (26) e (16) senza escludere a priori, sulla base delle precedenti considerazioni, che l'analogo relativistico μ' della densità classica μ, figurante appunto nel sostituto relativistico (16) dell'equazione di Poisson, possa dipendere da ρ, $X_{\alpha\beta}$, $F^{\alpha\beta}$, $f^{\alpha\beta}$, q_α, u_α e γ_α. È naturale ammettere la validità delle seguenti tre condizioni su μ':

(*a*) *μ' è una funzione universale*

$$\mu' = \mu'(g_{\alpha\beta}, \gamma^\rho, u^\alpha, \rho, X_{\alpha\beta}, q_\alpha, F^{\gamma\delta}, f^{\gamma\delta}) \tag{27}$$

dipendente dalle sole unità di misura.

(*b*) *Per $\rho = 0$, ossia nel vuoto, μ' è indipendente da u^ρ, ρ, $X_{\alpha\beta}$ e q_α.*

(*c*) La (27) *si riduce alla condizione $\mu' = c^{-2}\rho$ nel caso $\gamma^\rho = u^\rho$, $X_{\alpha\beta} = q_\alpha = F_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} = 0$.*

Osserviamo che nella (27) si può cancellare l'argomento $g_{\alpha\beta}$ pur d'intendere la μ' come uno scalare invariante in senso tensoriale e dotato di una espressione in $\gamma^\rho, u^\rho, \cdots, f_{\alpha\beta}$ *Lorentz-invariante*, ossia invariante in forma per trasformazioni di Lorentz.

La condizione (*b*) è ovvia e la (*c*) si giustifica direttamente sulla base di (27) e sull'affermazione fatta dopo la (15) secondo cui μ' è una quantità estremamente prossima alla densità μ (misurata classicamente).

Riassumendo, in base alle considerazioni che ci hanno condotto alla condizione (16), la quale in certo senso costituisce una possibile forma di sostituto relativistico dell'equazione classica di Poisson, e in base alle considerazioni precedenti è naturale precisare questo sostituto nel seguente postulato.

POSTULATO 2. – *Esiste una funzione del tipo* (27) *che verifica le condizioni* (*a*), (*b*) *e* (*c*) *e soddisfa la condizione* (16) *in corrispondenza ad ogni processo* (*fisicamente*) *possibile.*

N. 6. – *Postulato di possibilità.*

Pensiamo gli argomenti $g_{\alpha\beta}, \cdots, f_{\alpha\beta}$ nella (27), e J^α come funzioni del punto evento x^α:

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x) \quad , \quad \rho = \rho(x) \quad , \quad u^\rho = u^\rho(x) \quad , \quad X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}(x) \, , \\ q_\alpha = q_\alpha(x) \quad , \quad F^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}(x) \quad , \quad f^{\alpha\beta} = f^{\alpha\beta}(x) \quad , \quad J^\alpha = J^\alpha(x) \, . \end{cases} \tag{28}$$

Ordiniamo comunque le componenti dei tensori

$$u_\gamma u^\gamma + 1 \quad , \quad q_\gamma u^\gamma \quad ; \quad X_{\alpha\beta} - X_{\beta\alpha} \quad , \quad F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha} \quad , \quad f^{\alpha\beta} + f^{\beta\alpha} \tag{29}$$

che pensiamo come funzioni delle grandezze (tensoriali) u^α, q_α, $X_{\alpha\beta}$, $F^{\alpha\beta}$ e $f^{\alpha\beta}$. Detta $\varphi_{(r)}$ l'r–ma di queste componenti, in base alla definizione delle suddette grandezze e alla nota simmetria di $X_{\alpha\beta}$ (valida nel caso presente di assenza di coppie di contatto) si ha

$$\varphi_{(r)} \equiv 0 \qquad \left(\text{onde} \quad \frac{\partial \varphi_{(r)}}{\partial u_\gamma} u_{\gamma/\beta} + \cdots + \frac{\partial \varphi_{(r)}}{\partial f_{\gamma\delta}} f_{\gamma\delta/\beta} \equiv 0\right). \tag{30}$$

Per uniformità pensiamo $X_{\alpha\beta}$ come la parte simmetrica del tensore degli sforzi, cosicché possiamo riguardare tutte le (30) come valide per la definizione delle grandezze che in esse intervengono, e chiamarle per questo identità.

Possiamo dire che (28) è, o rappresenta, un *processo fisicamente possibile* se il processo (28) è realizzabile almeno mediante esperienze ideali. Volendo essere più conformi al modo di procedere di certi autori, potremmo dire che il processo (28) è fisicamente possibile se esso soddisfa le identità $(30)_1$, le equazioni universali fondamentali – ossia quelle di Maxwell (17), quelle di conservazione (26) e quella di Poisson (Postulato 2) – e inoltre le equazioni costitutive. Tra queste ultime c'è la relazione seguente caratterizzata dal tensore dielettrico $\eta^{\gamma\delta\lambda\mu}$,

$$f^{\gamma\delta} = \eta^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} \qquad \text{onde} \quad f^{\gamma\delta}{}_{/\beta} = \eta^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu/\beta} F^{\lambda\mu} + \eta^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu}{}_{/\beta}, \tag{31}$$

e inoltre varie altre, ben note, che involgono altre grandezze quali la temperatura assoluta T, $T_{/\rho}$, il tensore di deformazione $\varepsilon_{L\mu}$, e, se si vuole, anche grandezze chimiche $c_{(R)}$. Tra queste equazioni costitutive ci sono quelle che esprimono q_α (legge di Fourier), $J^\alpha + u^\alpha u_\rho J^\rho$ (legge di Ohm), $X_{\alpha\beta}$ e ρ in funzione di T, $T_{/\rho}$, $F_{\alpha\beta}$, ε_{LM} ed eventualmente $c_{(R)}$.

Per esempio, nel caso semplice di assenza di fenomeni ereditari il complesso delle suaccennate equazioni può riguardarsi come un sistema di equazioni alle derivate parziali e la sua generica soluzione è determinata dai dati iniziali e al contorno. Dirò che un sistema di valori di $g_{\alpha\beta}$, u_ρ, $\cdots$, $f^{\gamma\delta}$, $u_{\rho/\beta}$, $\cdots$, $f^{\gamma\delta}{}_{/\beta}$ è (*fisicamente*) *realizzabile* se si realizza in qualche punto x^α per qualche scelta delle funzioni (28) rappresentanti un processo fisicamente possibile, in corrispondenza a un opportuno materiale. L'arbitrarietà delle suddette condizioni iniziali, per così dire arricchita dalle possibilità di scelta dei materiali, ci permette l'affermazione di possibilità fisica costituente il seguente postulato. Ho preferito enunciare esplicitamente tale affermazione, e come postulato, non ostante usualmente tali ammissioni di possibilità fisica vengano sottintese, specialmente perché qui delle equazioni costitutive si è fatto solo qualche cenno.

POSTULATO 3. – *Consideriamo un sistema fisicamente realizzabile* σ *di valori di* $g_{\alpha\beta}$, u^α, ρ, $X_{\alpha\beta}$, q_α, $F^{\gamma\delta}$, $f^{\gamma\delta}$, *e inoltre un qualunque sistema* $\sigma_{/\beta}$ *di valori di* $u^\rho{}_{/\beta}$, $\cdots$, $f^{\gamma\delta}{}_{/\beta}$ *i quali sistemi verifichino la prima equazione di Maxwell* $(17)_1$, *l'equazione di conservazione* (26) *e le identità* (30). *Allora o* $\sigma_{/\beta}$ *è fisicamente compatibile con* σ (*ossia il sistema complessivo* $\sigma + \sigma_{/\beta}$ *è fisicamente realizzabile*), *oppure* $\sigma_{/\beta}$ *è una combinazione lineare di tali sistemi compatibili con* σ.

Nel formulare il Postulato 2 si è potuta trascurare l'equazione $(31)_2$ perché essa non lega $f^{\gamma\delta}{}_{/\beta}$ a $F^{\gamma\delta}{}_{/\beta}$; infatti $\eta^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu}$ e $\eta^{\gamma\delta}{}_{\lambda\mu/\beta}$ sono largamente arbitrari in quanto dipendono dal materiale in considerazione. Analogamente si è potuta trascurare l'equazione di Maxwell $(17)_2$ perché in essa figura J^α e non ostante la parte spaziale di J^α sia per un dato materiale una funzione di $F^{\gamma\delta}$ e di altre grandezze $G_{(s)}$ in base alla legge di Ohm, tuttavia al variare del materiale in considerazione J^α può certo assumere almeno quattro valori linearmente indipendenti (in corrispondenza di valori di $F^{\gamma\delta}$ e di $G_{(s)}$ arbitrariamente prefissati) – cfr. la condizione *b*) in [2, N. 7].

Infine non si è considerata l'equazione di Poisson o un suo analogo, perché in Fisica classica questa non lega gli analoghi classici delle grandezze relativistiche u_ρ, $u_{\rho/\beta}$, $\cdots$, $f^{\gamma\delta}$, $f^{\gamma\delta}{}_{/\beta}$ in quanto essi non includono il potenziale gravitazionale Φ.

N. 7. – *Qualche preliminare matematico.*

Per snellire la dimostrazione del teorema fondamentale del N. 8 dimostro due lemmi

LEMMA 1. – *È nullo il tensore* $\lambda_\alpha{}^\rho$ *per cui*

$$\lambda_\alpha{}^\rho\, \varepsilon_{\rho\beta\gamma\delta} = \lambda_\beta{}^\rho\, \varepsilon_{\rho\alpha\gamma\delta}\,. \tag{32}$$

Infatti per α, β, γ, δ distinti la (32) implica

$$\lambda_{\bar\alpha}{}^{\bar\alpha}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{\bar\beta}{}^{\bar\beta}\, \varepsilon_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\lambda_{\bar\beta}{}^{\bar\beta}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

dove con le lineette intendiamo indicare che su α e β non si sottindende alcuna sommatoria.

Ne segue $\lambda_{\bar\alpha}{}^{\bar\alpha} = -\lambda_{\bar\beta}{}^{\bar\beta}$ per $\alpha \neq \beta$, onde ad es. $\lambda_0{}^0 = -\lambda_1{}^1 = \lambda_2{}^2 = -\lambda_0{}^0$. Quindi $\lambda_{\bar\alpha}{}^{\bar\alpha} = 0$. Inoltre da (32) si trae

$$\lambda_0{}^1\, \varepsilon_{1230} = \lambda_0{}^\rho\, \varepsilon_{\rho 230} = \lambda_2{}^\rho\, \varepsilon_{\rho 030} = 0\,, \tag{33}$$

onde $\lambda_0{}^1 = 0$. Permutando circolarmente gli indici 1, 2, 3 in (33) si riconosce che $\lambda_0{}^r = 0$. Usando poi le permutazioni circolari degli indici 0, 1, 2, 3 si vede che $\lambda_\alpha{}^\rho = 0$ per $\alpha \neq \rho$ (oltre che per $\alpha = \rho$). c.d.d.

LEMMA 2. – *I tensori simmetrici* $T_{\alpha\beta}$ *e* $\tau_{\alpha\beta}$ *siano date funzioni Lorentz-invarianti delle componenti* $\xi_{(L)}$ *dei tensori* $(g_{\alpha\beta},)\, u_\alpha$, ρ, $X_{\alpha\beta}$, $F^{\gamma\delta}$ e $f^{\gamma\delta}$ *(argomenti di* μ' *nella* (27)) *i quali tensori sono definiti per* $\xi_{(L)}$ *verificanti le identità* $(30)_1$. *Estendiamo la definizione di queste funzioni a valori generici di* $\xi_{(L)}$ *sostituendo gli argomenti* u_α, q_α, $X_{\alpha\beta}$, $F^{\gamma\delta}$ e $f^{\gamma\delta}$ *rispettivamente con*

$$\left\{\begin{array}{lll} (-u'_\rho\, u'^\rho)^{-1/2}\, u'_\alpha\,, & \overset{\perp}{g}_\alpha{}^\rho\, q'_\rho\,, & \overset{\perp}{g}_\alpha{}^\gamma\, \overset{\perp}{g}_\beta{}^\delta\, X'_{(\gamma\delta)}\,, \\ F'^{[\gamma\delta]}\,, & f'^{[\gamma\delta]} & \qquad (\text{ove } \overset{\perp}{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)\,. \end{array}\right. \tag{34}$$

Allora sussistono le seguenti tesi:

(*a*) *la suddetta estensione conserva la Lorentz–invarianza e se le funzioni* $T_{\alpha\beta}$ *e* $\tau_{\alpha\beta}$ *coincidono sulla varietà* $(30)_1$, *allora le loro estensioni coincidono ovunque*.

(*b*) *Supponiamo pure che per le funzioni* $T_{\alpha\beta}$ *e* $\tau_{\alpha\beta}$ *definite sulla varietà* $(30)_1$ *la*

$$\tau_{\alpha\beta}{}^{/\beta} \equiv \sum_L \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{(L)}} \xi_{(L)}{}^{/\beta} = 0 \tag{35}$$

sussista per tutti i valori delle variabili $\xi_{(L)}{}^{/\beta}$ *che verificano* $(17)_1$ *e*

$$T_{\alpha\beta}{}^{/\beta} \equiv \sum_L \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi_{(L)}} \xi_{(L)}{}^{/\beta} = 0 ; \tag{36}$$

allora esistono due costanti K *e* K′ *per cui*

$$\tau_{\alpha\beta} = K T_{\alpha\beta} + K' g_{\alpha\beta} . \tag{37}$$

DIMOSTRAZIONE. – La tesi (*a*) è ovvia. Riguardo alla tesi (*b*), la supposta validità di (35), stante $(30)_1$, per i valori delle $\xi_{(L)}{}^{/\beta}$ verificanti $(17)_1$, $(30)_2$ e (36) implica per le estensioni di $T_{\alpha\beta}$ e $\tau_{\alpha\beta}$ la validità di (35) per i sistemi $\xi'_{(L)}{}^{/\beta}$ verificanti le sole $(17)_1$ e (36) nelle $\xi_{(L)}{}^{/\beta}$ [10]. Allora esistono dei moltiplicatori (di Lagrange) $\lambda_\alpha{}^\rho$ e $c_\alpha{}^\sigma$ Lorentz–invarianti e tali che la

$$\tau_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = \lambda_\alpha{}^\rho \, \varepsilon_\rho{}^{\gamma\delta}{}_\beta \, F_{\gamma\delta}{}^{/\beta} + c_\alpha{}^\sigma \, T_{\sigma\beta}{}^{/\beta} \tag{38}$$

sussiste per valori arbitrari $\xi'_{(L)}{}^{/\beta}$ delle variabili $\xi_{(L)}{}^{/\beta}$ (le quali includono $F_{\gamma\delta}{}^{/\beta}$). Ne segue

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \xi'_{(L)}} = \delta^{(L)}_{\gamma\delta} \, \lambda_\alpha{}^\rho \, \varepsilon_\rho{}^{\gamma\delta}{}_\beta + c_\alpha{}^\sigma \frac{\partial T_{\sigma\beta}}{\partial \xi'_{(L)}} \tag{39}$$

ove il simbolo di Kronecker $\delta^{(L)}_{\gamma\delta}$ vale uno se la variabile $\xi'_{(L)}$ è la $F'_{\alpha\beta}$ e vale zero altrimenti. Ricordo che si intende, per esempio,

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial F_{\lambda\mu}} = \left[\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial F'_{\lambda\mu}} \right]_{F'_{\rho\sigma} = F_{\rho\sigma}} . \tag{40}$$

Supponiamo ora il riferimento (x) pseudo–euclideo e poniamo

$$M_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + X_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + u_\alpha q_\beta = M_{\beta\alpha} \quad - \text{ cf. } (8); \tag{41}$$

(10) Ovviamente per $\xi'_{(L)}$ si intendono le variabili u'_α, ρ, $X'_{\alpha\beta}$, q'_α, $F'^{\gamma\delta}$ e $f'^{\gamma\delta}$ cosicché esse sono legate alle $\xi_{(L)}$ dalle espressioni (34) delle $\xi_{(L)}$ per le $\xi'_{(L)}$. Date ad arbitrio le $\xi'_{(L)}{}^{/\beta}$, le corrispondenti $\xi_{(L)}{}^{/\beta}$ costituiscono l'arbitraria soluzione di $(30)_2$.

allora $\rho = M^{00}$, $X^{rs} = M^{rs}$ e $q^r = M^{r0} = M^{0r}$, cosicchè la parte delle (39) con le $\delta^{(L)}_{\gamma\delta}$ tutte nulle equivale alle

$$(39') \qquad \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial M^{\lambda\mu}} = c_\alpha{}^\sigma \frac{\partial T_{\sigma\beta}}{\partial M^{\lambda\mu}} = c_\alpha{}^\sigma g_{\sigma(\lambda} g_{\beta\mu)} = c_{\alpha(\lambda} g_{\beta\mu)} .$$

Per questa relazione e la $\tau_{\alpha\beta} \equiv \tau_{\beta\alpha}$ si ha

$$c_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + c_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda} = c_{\beta\lambda} g_{\alpha\mu} + c_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda} .$$

Essendo il riferimento (x) pseudo–euclideo, per α, β e λ distinte e $\mu = \beta$ ne segue

$$(39'') \qquad c_{\alpha\lambda} = 0 \qquad \text{per} \quad \alpha \neq \lambda .$$

Dunque al più $c_{\beta\beta}$ può essere $\neq 0$; inoltre $c_\beta{}^\sigma$ è Lorentz invariante. Dalla validità delle $\bar{c}_{\beta\sigma} = 0$ per $\beta \neq \sigma$ essendo $\bar{c}_{\beta\sigma}$ le componenti del tensore $c_{\alpha\beta}$ in un qualsiasi riferimento pseudo–euclideo, si deduce facilmente

$$(42) \qquad c_\beta{}^\sigma = K g_\beta{}^\sigma \qquad \text{onde} \quad c_{[\alpha}{}^\sigma \frac{\partial T_{\sigma\beta]}}{\partial \xi'_{(L)}} = K \frac{\partial T_{[\alpha\beta]}}{\partial \xi'_{(L)}} = 0 .$$

Per (39) e la $\tau_{\alpha\beta} \equiv \tau_{\beta\alpha}$ ne segue $\lambda_{[\alpha}{}^\rho \varepsilon_{\rho\gamma\delta\beta]} = 0$, cosicché per il Lemma 1 è $\lambda_\alpha{}^\rho = 0$. Allora da (39) segue che $\tau_{\alpha\beta}$ è una funzione di $T_{0\beta}, \cdots, T_{3\beta}$:

$$(43) \qquad \tau_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}(T_{0\beta}, \cdots, T_{3\beta}) .$$

Per (43) vale la $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \Psi_{\beta\alpha}(T_{0\alpha}, \cdots, T_{3\alpha})$ dal cui confronto con la (43) risulta che $\tau_{\alpha\beta}$ dipende dalla sola componente $T_{\alpha\beta}$ se $\alpha \neq \beta$:

$$(43') \qquad \tau_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}(T_{\alpha\beta}) \qquad \text{per} \quad \alpha \neq \beta.$$

Si ha

$$(44) \qquad \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \xi'_{(L)}} = \frac{\partial \Psi_{\alpha\beta}}{\partial T_{\sigma\delta}} \frac{\partial T_{\sigma\delta}}{\partial \xi'_{(L)}} .$$

Confrontando (44) con (39) valida per $\lambda_\alpha{}^\rho = 0$, e tenendo conto di (43), della continuità delle $\partial\Psi_{\alpha\beta}/\partial T_{\gamma\delta}$ e dell'effettiva presenza delle $\xi_{(L)}$ nell'espressione (8) di $T_{\alpha\beta}$ magari scritta in un generico riferimento pseudo–euclideo, si riconosce che è

$$(45) \qquad \frac{\partial \Psi_{\alpha\beta}(\eta_0, \cdots, \eta_3)}{\partial \eta_\sigma} = c_\alpha{}^\sigma \qquad \text{per} \quad \eta_\sigma = T_{\sigma\beta} .$$

Allora anche per $\beta \neq \gamma$ è

$$(46) \qquad \left[\frac{\partial \Psi_{\alpha\beta}}{\partial \eta_\sigma}\right]_{\eta_\mu = T_{\mu\beta}} = c_\alpha{}^\sigma = \left[\frac{\partial \Psi_{\alpha\gamma}}{\partial \eta_\sigma}\right]_{\eta_\mu = T_{\mu\gamma}} .$$

Fissati comunque α e β, si prenda γ diverso da α e β, cosicché il 2º membro di $(46)_2$ dipende solo da $T_{\alpha\gamma}$ mentre il primo di $(46)_1$ solo da $T_{0\beta}, \cdots, T_{3\beta}$, onde non da $T_{\alpha\gamma}$. Ne segue che $c_\alpha{}^\sigma$ è costante. Allora per (45) e $(42)_1$

$$\tau_{\alpha\beta} = K g_\alpha{}^\sigma T_{\sigma\beta} + K'_{\alpha\beta} \tag{47}$$

ove $K'_{\alpha\beta}$ è costante al pari di K. Inoltre, essendo la (47) Lorentz-invariante, deve essere $K'_{\alpha\beta} = K' g_{\alpha\beta}$. Dunque (47) si riduce alla (37). c.d.d.

N. 8. – *Deduzione delle equazioni gravitazionali da quelle di conservazione, quelle di Maxwell e il precedente naturale sostituto relativistico dell'equazione di Poisson.*

Sia la μ' espressa da (27) la funzione che in base al Postulato 2 soddisfa le condizioni (*a*)–(*c*) [N. 5] e la (16) in ogni processo fisicamente possibile. Per quanto si è detto dopo (16) o a proposito di $(34)_1$, la sostituzione $\gamma^\alpha \to \gamma^\alpha (-\gamma^\rho \gamma_\rho)^{-1/2}$ ci permette di pensare (16) e (27) come valide per ogni vettore temporale γ^α.

Fissiamo comunque dei valori per gli argomenti $g_{\alpha\beta}, \cdots, f_{\alpha\beta}$ nella (27) che siano realizzabili, ossia verificantisi in qualche punto-evento x^ρ durante un processo (28) fisicamente possibile.

In base al Postulato 2 [N. 5] sussiste l'identità (16) in γ^α. Siccome $R_{\rho\sigma}$ non dipende da γ^ρ, ne segue che $\mu' \gamma^\rho \gamma_\rho$ è una forma quadratica in γ^ρ, cosicché possiamo porre (16) nella forma

$$R_{\alpha\beta} = \frac{4\pi h}{c^2}\, \mu'_{\alpha\beta} \qquad (\gamma^\rho \gamma_\rho \mu' = \mu'_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta) \tag{48}$$

ove le $\mu'_{\alpha\beta}$ sono funzioni (universali) delle $g_{\alpha\beta}$, ρ, $X^{\rho\sigma}, \cdots, f_{\alpha\beta}$. Per $(22)_2$ la (48) equivale alla

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi h}{c^4}\, \tau_{\alpha\beta} \qquad \text{ove} \qquad -\frac{2}{c^2}\, \tau_{\alpha\beta} = \mu'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \mu'^{\rho}_{\rho} g_{\alpha\beta}\,. \tag{49}$$

Già in base a (48) possiamo riguardare $\mu'_{\alpha\beta}$ come un tensore. Per la postulata condizione (*a*) [N. 5], $\mu'_{\alpha\beta}$ è una funzione universale delle $(g_{\alpha\beta})$ u_α, $\rho, \cdots, f_{\alpha\beta}$. Tale è quindi pure il tensore $\tau_{\alpha\beta}$ definito da $(49)_2$.

Per $(22)_2$ $A_{\alpha\beta}{}^{/\beta} \equiv 0$ onde (49) implica la (35) che possiamo affermare valida per ogni processo fisicamente possibile. Quindi la (35) vale per ogni sistema $\sigma + \sigma_{/\beta}$ fisicamente realizzabile di valori di $g_{\alpha\beta}$, u^α, ρ, $X_{\alpha\beta}$, $F^{\gamma\delta}$, $f^{\gamma\delta}$, $u^\alpha{}_{/\beta}, \cdots, f^{\gamma\delta}{}_{/\beta}$. Inoltre (35) è lineare (e omogenea) rispetto ad $u^\alpha{}_{/\beta}, \cdots, f^{\gamma\delta}{}_{/\beta}$ al pari della prima equazione di Maxwell $(17)_1$ e delle equazioni di conservazione (26). Allora in base al Postulato 3 [N. 6] la (35) è soddisfatta per tutti i valori delle variabili $\xi_{(L)}{}^{/\beta}$ che verificano $(17)_1$ e la (26) scritta nella forma (36). In base alla tesi (*b*) del Lemma 2 ne segue la (37).

Per il Postulato 2 vale la condizione (*c*) [N. 5]. In base ad essa, $(48)_2$ e $(49)_2$, nel caso $X_{\alpha\beta} = q_\alpha = F_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} = 0$ e per $u^\alpha = \gamma^\alpha$ abbiamo

$$\rho = c^2 \mu' = -c^2 \mu'_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 2\left(\tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \tau_\rho{}^\rho g_{\alpha\beta}\right) u^\alpha u^\beta. \tag{50}$$

Allora da (37) e $(8)_1$ segue, nel detto caso

$$\rho = 2\,K\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,T_\rho{}^\rho\, g_{\alpha\beta}\right) u^\alpha u^\beta + 2\,K' = K\rho + 2\,K'. \tag{51}$$

Questa vale per ogni $\rho > 0$ onde $K = 1$ e $K' = 0$. Allora per (37) le (49) si identificano con le equazioni gravitazionali di Einstein.

Esse risultano dunque dedotte rigorosamente da una versione relativistica dell'equazione di Poisson e dal postulato 3 [N. 6] di possibilità.

Sulla base delle considerazioni precedenti, e in particolare del Lemma 2, conviene osservare esplicitamente che nell'*ambito della Relatività ristretta, basata sulle equazioni di Maxwell* (17), *su quelle di conservazione* (26), *e sull'espressione* (8) *di* $T_{\alpha\beta}$, *un tensore* $\tau_{\alpha\beta}$ *espresso come funzione di* $g_{\alpha\beta}$, ρ, u_α, $X_{\alpha\beta}$, q_α, $F_{\alpha\beta}$ *e* $f_{\alpha\beta}$ *è accettabile per tensore dell'energia totale* (*in sostituzione di* $T_{\alpha\beta}$) *se e solo se esso è legato a* $T_{\alpha\beta}$ *dalla* (37) (*con* K *e* K' *costanti arbitrarie*).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BRESSAN, *Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in Relatività generale*, « Riv. di Mat. Univ. Parma », *4*, 23 (1963).

[2] A. BRESSAN, *Qualche proprietà di unicità del tensore energetico del campo elettromagnetico*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », (II) *15*, 147 (1965).

[3] A. BRESSAN, *Sui fluidi capaci di elettro-magneto-strizione dai punti di vista classico e relativistico*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », (IV) *74*, 318 (1966).

[4] A. BRESSAN, *Ancora sul teorema di Poynting*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (VIII) *42*, 491 (1967).

[5] C. JANKIEWICZ, *Dimostrazione dell'unicità del tensore energia impulso del campo elettromagnetico nello spazio Riemanniano*. (In Russo sul « Bull. int; Acad. pol. Sci. »), « Serie Sci. Math. Astr. Phys. », *10*, 403 (1962).

[6] J. L. SYNGE, *Relativity the general theory*. North Holland, Amsterdam, 1960.