
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ENZO MARTINELLI

**Omologia e coomologia singolari, orientata e
alternante**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 53 (1972), n.3-4, p.
264-274.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_3-4_264_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia. — *Omologia e coomologia singolari, orientata e alternante.* Nota (*) del Corresp. ENZO MARTINELLI.

SUMMARY. — Oriented singular homology and alternating singular cohomology are considered and their natural equivalence with corresponding ordinary singular functors is directly proved for any topological space.

È ben conosciuto che la teoria dell'omologia singolare di uno spazio topologico X fu inizialmente costruita da S. Lefschetz ed altri a partire dalle rappresentazioni continue in X di un simpleso affine prototipo «orientato». Successivamente S. Eilenberg [1] ebbe l'idea di ricostruire la teoria, o meglio una teoria analoga, a partire da un prototipo «ordinato», il che appariva, per varie ragioni, più conveniente.

Nel caso in cui X è un poliedro risulta indirettamente (tramite l'omologia simpliciale) che le due teorie danno luogo a funtori naturalmente equivalenti. Non mi consta che sia nota una dimostrazione diretta e generale di tale equivalenza (1).

Il presente lavoro è appunto rivolto a fornire una dimostrazione di ciò, con le necessarie precisazioni delle definizioni opportune, per quanto riguarda sia la «omologia singolare orientata» sia la corrispondente «coomologia singolare alternante» (il cui interesse, in alcune circostanze, mostrerò in un prossimo lavoro).

1. RICHIAMI E PREMESSE

1.1. Denoteremo con $S_*(X) = \{S_n(X), \partial_n\}$ il complesso delle catene singolari intere di uno spazio topologico X .

Sia $s_n: \Delta_n \rightarrow X$ un n -simpleso singolare di X , essendo $\Delta_n = U^0 U^1 \dots U^n$ l' n -simpleso affine prototipo ordinato. Ad ogni permutazione che muta $(0, 1, \dots, n)$ in $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ corrisponde l'affinità di permutazione $\alpha = \alpha_n = \alpha^{i_0 \dots i_n}: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ che porta il vertice U^k di Δ_n nel vertice U^{i_k} . L'affinità α induce un automorfismo $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{i_0 \dots i_n}$ di $S_n(X)$ definito da $\bar{\alpha}(s_n) = s_n \circ \alpha = s_n \alpha$.

Diremo che gli $(n+1)!$ semplici $s_n \alpha$ (non necessariamente tutti distinti), ottenuti al variare di α nel gruppo delle affinità di permutazione, costituiscono un sistema di semplici singolari *associati*, e denoteremo tale sistema con $A(s_n)$ ($= A(s_n \alpha)$).

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1972.

(1) Un cenno interrogativo che sembra connesso con questa questione trovasi in R. GODEMENT [3], p. 59. Tuttavia le definizioni che qui considereremo non coincidono del tutto con quelle di Godement.

Indicheremo con $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon_{i_0 \dots i_n}$ la segnatura della permutazione $(0, \dots, n) \rightarrow (i_0, \dots, i_n)$.

1.2. Più in generale avremo da considerare anche *affinità di faccia* $\beta = \beta_p = \beta^{j_0 \dots j_p} : \Delta_p \rightarrow \Delta_n (p \leq n)$ definite dalle $\beta(U^k) = U^{j_k}$ con $k = 0, \dots, p$ e gli j_k *distinti*, compresi tra 0 e n . Per $p = n$ si ricade nelle affinità di permutazione.

Una β_p può anche pensarsi come un p -simpleso singolare affine di Δ_n . In tale accezione scriveremo talvolta $\beta_p = \beta^{j_0 \dots j_p} = U^{j_0} \dots U^{j_p}$. Notiamo che si ha allora:

$$(1.2.1) \quad \partial \beta^{j_0 \dots j_p} = \sum_0^p (-1)^k \beta^{j_0 \dots j_p} \beta^{0 \dots \hat{k} \dots p} = \sum_0^p (-1)^k \beta^{j_0 \dots \hat{j}_k \dots j_p},$$

relazione che, coi simboli testè introdotti, si scrive anche:

$$(1.2.2) \quad \partial U^{j_0} \dots U^{j_p} = \sum_0^p (-1)^k U^{j_0} \dots \hat{U}^{j_k} \dots U^{j_p};$$

e quest'ultima formula *coincide formalmente* con quella che esprime il bordo del simpleso ordinato $U^{j_0} \dots U^{j_p}$ del complesso simpliciale $K(\Delta_n)$ costituito da Δ_n e dalle sue facce.

La (1.2.2) vale in particolare per l' n -simpleso singolare affine $\alpha_n = \alpha^{i_0 \dots i_n} = U^{i_0} \dots U^{i_n}$.

1.3. Ancor più in generale si possono considerare *affinità eventualmente degeneri* $\gamma = \gamma_p = \gamma^{j_0 \dots j_p} : \Delta_p \rightarrow \Delta_n (p \geq n)$ definite dalle $\gamma(U^k) = U^{j_k}$ con $k = 0, \dots, p$ e gli j_k *distinti o coincidenti* compresi tra 0 ed n .

Anche una γ_p può pensarsi come un p -simpleso singolare affine di Δ_n , che diremo *schacciato* qualora due o più indici j_k coincidano.

2. SOTTOCOMPLESSO SINGOLARE DEGENERE

2.1. Sia $T_n(X)$ il sottogruppo di $S_n(X)$ generato da:

- 1) *catene degeneri semplici*, del tipo $s_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha$;
- 2) *simplessi degeneri*, cioè s_n tali che esista un'affinità inversa α ($\varepsilon(\alpha) = -1$) per cui si abbia $s_n \alpha = s_n^{(2)}$.

Indicheremo con $T'_n(X)$, $T''_n(X)$ i sottogruppi di $T_n(X)$ generati risp. dagli elementi del tipo 1), 2).

(2) Le catene del tipo 1) generano quelle indicate con *a*) in R. GODEMENT [3], p. 58, mentre quelle ivi indicate con *b*) sono generate da simplessi che possono rappresentarsi nella forma $s_n \gamma_n$ essendo γ_n un simpleso singolare affine schacciato (n. 1.3). Tali simplessi $s_n \gamma_n$ sono ovviamente particolari rispetto a quelli qui indicati col tipo 2).

Se, in luogo dello spazio X , si considera un complesso simpliciale K , $T'_n(X)$ e $T''_n(X)$ corrispondono ai sottogruppi $T'_n K$ e $T''_n K$ delle n -catene simpliciali ordinate di K , che sono generati risp. dalle catene degeneri semplici del tipo $A^0 \cdots A^n - \varepsilon A^{i_0} \cdots A^{i_n}$ (ε = classe della permutazione $(0, \dots, n) \rightarrow (i_0, \dots, i_n)$; $A^0, \dots, A^n$ vertici di un n -simpleso di K), e dai semplici schiacciati (con coincidenze di vertici). L'analogia tra $T'(X)$, $T'K$ è più stretta e giocherà nel seguito (non così quella tra $T''(X)$, $T''K$).

Stabiliamo il seguente

(2.1.1) LEMMA. - *I sottogruppi $T_n(X)$ costituiscono le componenti di un sottocomplesso $T.(X)$ di $S.(X)$ (sottocomplesso singolare degenero).*

2.2. Per dimostrare (2.1.1) premettiamo alcune osservazioni.

Fissato un sistema di semplici singolari associati $A(s_n)$ (n. 1.1), indichiamo con $TA(s_n)$, $T'A(s_n)$, $T''A(s_n)$ i sottogruppi risp. di $T_n(X)$, $T'_n(X)$, $T''_n(X)$, costituiti da catene di semplici di $A(s_n)$.

a) Se s_n è degenero, è tale ogni semplice di $A(s_n)$.

Infatti è per ipotesi $s_n = s_n \alpha$ con $\varepsilon(\alpha) = -1$. Per ogni $s'_n = s_n \alpha' \in A(s_n)$, si ha allora: $s'_n = s_n \alpha \alpha' = s'_n (\alpha')^{-1} \alpha \alpha'$ con $\varepsilon((\alpha')^{-1} \alpha \alpha') = \varepsilon(\alpha) = -1$, onde anche s'_n è degenero.

b) $T'A(s_n)$ è generato da catene degeneri semplici del tipo $s_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha$, essendo s_n fissato.

Infatti una catena degenero semplice di $T'A(s_n)$ è della forma $s'_n - \varepsilon(\alpha') s'_n \alpha'$ con $s'_n \in A(s_n)$. Poichè $s'_n = s_n \alpha''$, risulta $s'_n - \varepsilon(\alpha') s'_n \alpha' = s_n \alpha'' - \varepsilon(\alpha') s_n \alpha'' \alpha' = -\varepsilon(\alpha'') (s_n - \varepsilon(\alpha'') s_n \alpha'') + \varepsilon(\alpha'') (s_n - \varepsilon(\alpha'') s_n \alpha'') s_n \alpha' \alpha'$.

c) $T''A(s_n)$ (s_n degenero) è liberamente generato dai semplici degeneri distinti $s_n^{(k)}$ di $A(s_n)$.

Scende da a).

d) $T'A(s_n)$ (con s_n non degenero) è liberamente generato da catene degeneri semplici del tipo $s_n - s_n^{(i)}$, $s_n + s_n^{(j)}$, essendo s_n , $s_n^{(i)}$, $s_n^{(j)}$ semplici distinti di $A(s_n)$.

Infatti, in base a b), una catena di $T'A(s_n)$ può esprimersi nella forma:

$$(2.2.1) \quad \sum_i \lambda_i (s_n - s_n \alpha_+^{(i)}) + \sum_j \mu_j (s_n + s_n \alpha_-^{(j)}),$$

dove λ_i, μ_j sono interi, $\alpha_+^{(i)}, \alpha_-^{(j)}$ indicano affinità risp. dirette e inverse, e si suppongono distinti due semplici $s_n^{(i)} = s_n \alpha_+^{(i)}$ e due semplici $s_n^{(j)} = s_n \alpha_-^{(j)}$ (com'è lecito riducendo i termini uguali). Se nella (2.2.1) risulta, per qualche i , $s_n = s_n \alpha_+^{(i)}$, il corrispondente termine svanisce e s'intenderà soppresso; non può invece aversi $s_n = s_n \alpha_-^{(j)}$ ovvero $s_n \alpha_+^{(i)} = s_n \alpha_-^{(j)}$, perchè altrimenti s_n sarebbe degenero contro il supposto. I coefficienti λ_i, μ_j risultano allora individuati.

Ciò premesso siamo in grado di dimostrare il Lemma (2.1.1). Si tratta di provare che $\partial T_n(X) \subset T_{n-1}(X)$, cioè che $T.(X)$ è stabile per il morfismo ∂ di $S.(X)$. Basta mostrare che:

e) $\partial(s_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha) \in T_{n-1}(X)$,

f) $\partial s_n \in T_{n-1}(X)$, se s_n è degenero.

Indicata con $I_n: \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ l'affinità identica, risulta $\partial(s_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha) = \partial(s_n I_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha_n)$. Riguardando $I_n - \varepsilon(\alpha) \alpha_n$ come catena singolare affine di Δ_n , se si prova che

$$(2.1.2) \quad \partial(I_n - \varepsilon(\alpha) \alpha_n) \in T_{n-1}(\Delta_n),$$

da quest'ultima segue la *e*) trasformando la (2.1.2) con la rappresentazione $s_n: \Delta_n \rightarrow X$.

Ora, se $\alpha_n = \alpha^{i_0 \dots i_n}$, col simbolismo di cui al n. 1.2, il primo membro di (2.1.2) si scrive $\partial(U^0 \dots U^n - \varepsilon(\alpha) U^{i_0} \dots U^{i_n})$. D'altronde (n. 1.2) si può interpretare quest'ultima espressione anche come il bordo di una catena degenerare semplice generatrice di $T'K(\Delta_n)$ e un calcolo formale dà allora:

$$(2.1.3) \quad \partial(U^0 \dots U^n - \varepsilon(\alpha) U^{i_0} \dots U^{i_n}) \in T'_{n-1}K(\Delta_n) \quad (3).$$

Ritornando al significato di catene singolari affini per i simboli di cui in (2.1.3), se ne trae la (2.1.2).

Infine, per provare *f*), si osservi che, pur essendo s_n degenerare, sussiste lo stesso la *e*), ove può in particolare assumersi $s_n = s_n \alpha$, $\varepsilon(\alpha) = -1$; cosicchè risulta intanto:

$$(2.1.4) \quad 2\partial s_n \in T_{n-1}(X).$$

Denotando con s_{n-1} il generico $(n-1)$ -simpleso singolare faccia di s_n , la (2.1.4) può maggiormente precisarsi così:

$$2\partial s_n \in \sum_{s_{n-1}} TA(s_{n-1}) = \sum_{s'_{n-1}} T'A(s'_{n-1}) + \sum_{s''_{n-1}} T''A(s''_{n-1}),$$

dove s'_{n-1} , s''_{n-1} indicano gli eventuali semplici, risp. non degeneri o degeneri, che sono facce distinte di s_n .

Avuto riguardo a *c*), *d*) per $n-1$ in luogo di n , si ha allora:

$$2\partial s_n = \sum_{s'_{n-1}} [\sum_i \lambda_i (s'_{n-1} - s'^{(i)}_{n-1}) + \sum_j \mu_j (s'_{n-1} + s'^{(j)}_{n-1})] + \sum_{s''_{n-1}} [\sum_k \nu_k s''^{(k)}_{n-1}],$$

dove si sottintende che i coefficienti interi λ_i , μ_j , ν_k dipendono dagli s'_{n-1} , s''_{n-1} . Ciò che importa è che i semplici s'_{n-1} , $s'^{(i)}_{n-1}$, $s'^{(j)}_{n-1}$, $s''^{(k)}_{n-1}$ sono tutti distinti. Ne segue che quei coefficienti sono di necessità pari, onde anche ∂s_n si esprime analogamente, e la *f*) è provata.

(3) La (2.1.3) è, d'altra parte, caso particolare della $\partial T'_n K \subset T'_{n-1} K$, a sua volta immediata conseguenza della relazione nota $\partial T_n K \subset T_{n-1} K$ ove $T_n K = T'_n K + T''_n K$ (cfr. per esempio S. EILENBERG-N. STEENROD [2], p. 173, Lemmi 6.2, 6.5).

3. COMPLESSI DI CATENE E COCATENE SINGOLARI, ORIENTATE E ALTERNANTI

3.1. Definiamo *complesso delle catene singolari intere orientate* ⁽⁴⁾ di X il quoziente:

$$(3.1.1) \quad S^{\text{ori}}(X) = S_*(X)/T_*(X).$$

Per ogni sistema di semplici singolari associati non degeneri $A(s_n)$ (n. 2.2, α), scegliamo un semplice, che diremo *normale* e denoteremo con $\tilde{s}_n = s_n \alpha$. Anche se non è individuata l'affinità α è individuata la segnatura $\varepsilon(\alpha)$. Infatti, se $s_n \alpha = s_n \alpha'$, risulta $s_n = s_n \alpha' \alpha^{-1}$ e $\varepsilon(\alpha' \alpha^{-1}) = \varepsilon(\alpha') \varepsilon(\alpha) = 1$, ch  altrimenti s_n sarebbe degenerare.

Ne segue che s_n pu  scriversi univocamente come somma di due addendi:

$$(3.1.2) \quad s_n = \varepsilon(\alpha) \tilde{s}_n + (s_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha),$$

il secondo dei quali appartiene a $T_n(X)$.

Denotato con $\tilde{S}_n(X)$ il sottogruppo di $S_n(X)$ generato dai semplici normali, si ha allora

$$(3.1.3) \quad S_n(X) \cong \tilde{S}_n(X) \oplus T_n(X),$$

e quindi $S_n^{\text{ori}}(X) \cong \tilde{S}_n(X)$.

Nel caso dei complessi simpliciali, possono assegnarsi i semplici normali, e conseguentemente gli analoghi dei sottogruppi $\tilde{S}_n$, a partire da un fissato ordinamento dei vertici del complesso simpliciale ⁽⁵⁾. Ne segue, in tal caso, che gli analoghi degli $\tilde{S}_n$ costituiscono le componenti di un sottocomplesso del complesso delle catene simpliciali ordinate.

Qui non accade lo stesso, perch  in generale $\partial \tilde{S}_n(X)$ non   contenuto in $\tilde{S}_{n-1}(X)$. Tuttavia, per ogni catena $\tilde{c}_n \in \tilde{S}_n(X)$ risulta

$$(3.1.4) \quad \partial \tilde{c}_n = \tilde{c}_{n-1} \quad \text{mod } T_{n-1}(X),$$

con la catena normale $\tilde{c}_{n-1} \in \tilde{S}_{n-1}(X)$ individuata a cagione della (3.1.3) (per $n-1$ in luogo di n).

Posto

$$(3.1.5) \quad \tilde{\partial} \tilde{c}_n = \tilde{c}_{n-1},$$

i sottogruppi $\tilde{S}_n(X)$ costituiscono allora un complesso di catene rispetto all'operatore di bordo $\tilde{\partial}$ definito dalla (3.1.5), complesso che risulta isomorfo al quoziente (3.1.1).

(4) La terminologia che usiamo di discosta da quella di EILENBERG-STEENROD [2], (p. 174, 6.8), che parla di « catene alternanti » (se pure limitatamente alle catene di un complesso simpliciale). Ci avviciniamo invece alla terminologia di R. GODEMENT [3], (p. 58), che sembra pi  opportuna, anche perch  dovremo considerare pi  oltre *catene alternanti*, in altro senso (cfr. successivo n. 5.2).

(5) Cfr. EILENBERG-STEENROD [2], p. 176 (dim. Teorema 6.10).

Diremo $\tilde{S}_\bullet(X) = \{\tilde{S}_n(X), \tilde{\partial}_n\}$ complesso delle catene singolari normali. Si ha dunque l'isomorfismo:

$$(3.1.6) \quad S_\bullet^{\text{ori}}(X) \cong \tilde{S}_\bullet(X),$$

e la successione esatta spezzata:

$$(3.1.7) \quad 0 \rightarrow T_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet^{\text{ori}}(X) \rightarrow 0.$$

3.2. Fissato un gruppo abeliano G , definiamo complesso delle catene singolari orientate di X a coefficienti in G :

$$(3.2.1) \quad S_\bullet^{\text{ori}}(X; G) = S_\bullet^{\text{ori}}(X) \otimes G \cong S_\bullet(X; G)/T_\bullet(X; G),$$

dove l'isomorfismo indicato è lecito appunto perché la (3.1.7) si spezza.

Similmente definiamo complesso delle cocatene singolari alternanti di X a valori in G :

$$(3.2.2) \quad S_\bullet^{\text{alt}}(X; G) = \text{Hom}(S_\bullet^{\text{ori}}(X), G),$$

che identificheremo al sottocomplesso di $S_\bullet^*(X; G) = \text{Hom}(S_\bullet(X), G)$ costituito dalle cocatene che si annullano su $T_\bullet(X)$ (una tal cocatena f^n ha valori alternanti su semplici singolari associati $s_n, s_n \alpha$, cioè: $\langle s_n \alpha, f^n \rangle = \varepsilon(\alpha) \langle s_n, f^n \rangle$).

L'omologia di $S_\bullet^{\text{ori}}(X; G)$ sarà denotata con $H_*^{\text{ori}}(X; G)$ e chiamata omologia singolare orientata di X a coefficienti in G . La coomologia di $S_\bullet^{\text{ori}}(X)$ a valori in G , cioè l'omologia di $S_\bullet^{\text{alt}}(X; G)$, sarà denotata con $H_*^{\text{alt}}(X; G)$ e chiamata coomologia singolare alternante di X a valori in G .

4. TEOREMI DI ISOMORFISMO

4.1. Dimostriamo:

(4.1.1) PROPOSIZIONE. — I complessi di catene $S_\bullet(X)$, $S_\bullet^{\text{ori}}(X)$ sono omotopicamente equivalenti.

Si ha intanto la rappresentazione di catene:

$$(4.1.2) \quad \varphi_\bullet : S_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet^{\text{ori}}(X)$$

definita dalla proiezione canonica di $S_\bullet(X)$ su $S_\bullet(X)/T_\bullet(X)$, (3.1.1); e l'isomorfismo dato dalla (3.1.6):

$$(4.1.3) \quad \tilde{\psi}_\bullet : S_\bullet^{\text{ori}}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{S}_\bullet(X).$$

Tale isomorfismo non definisce una rappresentazione di catene di $S_\bullet^{\text{ori}}(X)$ in $S_\bullet(X)$, perché $\tilde{S}_\bullet(X)$ non è un sottocomplesso di $S_\bullet(X)$ (n. 3.1). Tuttavia, indicata con $i_\bullet = \{i_n\}$ l'inclusione di $\tilde{S}_\bullet(X)$ in $S_\bullet(X)$, può ottenersi una rappresentazione di catene:

$$(4.1.4) \quad \psi_\bullet = (i_\bullet + \eta_\bullet) \tilde{\psi}_\bullet : S_\bullet^{\text{ori}}(X) \rightarrow S_\bullet(X),$$

costruendo in modo opportuno la rappresentazione $\eta_\bullet = \{\eta_n\} : \tilde{S}_\bullet(X) \rightarrow S_\bullet(X)$.

Precisamente, poiché $\tilde{\psi}_.$ è un isomorfismo, affinché $\psi_.$ sia una rappresentazione di catene occorre e basta che sia tale la rappresentazione $i. + \eta. : \tilde{S}_.(X) \rightarrow S_.(X)$, cioè deve aversi:

$$(4.1.5) \quad \partial(i. + \eta.) = (i. + \eta.) \tilde{\partial}.$$

Ora, com'è noto ⁽⁶⁾, ad ogni s_n può associarsi un sottocomplesso *aciclico* $P_.(s_n)$ di $S_n(X)$ generato dai semplici singolari del tipo $s_n \gamma_p$ con $p \leq n$ (n. 1. 3). Mostreremo che può costruirsi la rappresentazione di catene $i. + \eta_.$ con *portatore* $P_.(s_n)$.

Ed invero, la (4.1.5) si scrive esplicitamente

$$(4.1.6) \quad \partial \eta_n \tilde{s}_n = \eta_{n-1} \tilde{\partial} \tilde{s}_n + \tilde{\partial} \tilde{s}_n - \partial \tilde{s}_n,$$

relazione che è soddisfatta per $n = 0$ assumendo per esempio $\eta_0 = 0$. Possiamo allora procedere per induzione, ammessa la (4.1.6) per $n - 1$ in luogo di n e costruita η_{n-1} in guisa che $\eta_{n-1} \tilde{s}_{n-1}$ appartenga a $P_{n-1}(\tilde{s}_{n-1})$. Poiché $P_n(\tilde{s}_n)$ è aciclico, l'esistenza di η_n è assicurata sol che si mostri che il secondo membro di (4.1.6) è un ciclo di $P_n(\tilde{s}_n)$; il che accade di fatto giacchè risulta:

$$\partial \eta_{n-1} \tilde{\partial} \tilde{s}_n + \partial \tilde{\partial} \tilde{s}_n - \partial \partial \tilde{s}_n = (\eta_{n-2} \tilde{\partial} + \tilde{\partial} - \partial) \tilde{\partial} \tilde{s}_n + \partial \tilde{\partial} \tilde{s}_n = 0.$$

Ciò premesso, le rappresentazioni di catene $\varphi_., \psi_.$, (4.1.2), (4.1.4), forniscono l'equivalenza omotopica $S_.(X) \simeq S_.*^{ori}(X)$, poichè risulta: $\psi. \varphi. \simeq 1$, $\varphi. \psi. = 1$.

La prima relazione è conseguenza del fatto che $\psi. \varphi. - 1$ ha portatore aciclico $P_.(s_n)$ e inoltre si ha ovviamente $\psi_0 \varphi_0 = 1$ ($\tilde{S}_0(X) = S_0(X)$, $T_0(X) = 0$). Quanto alla seconda relazione, essendo $\psi_.$ un isomorfismo basta provare che $\varphi_n(i_n + \eta_n) \tilde{s}_n = \tilde{s}_n + T_n(X)$, ovvero:

$$(4.1.7) \quad (i_n + \eta_n) \tilde{s}_n = \tilde{s}_n \quad \text{mod } T_n(X).$$

Tenuto conto che $i. + \eta_.$ ha portatore $P_.(s_n)$, ogni n -catena del quale si riduce ad un multiplo di $\tilde{s}_n \text{ mod } T_n(X)$, risulta:

$$(4.1.8) \quad (i_n + \eta_n) \tilde{s}_n = k(\tilde{s}_n) \tilde{s}_n \quad \text{mod } T_n(X),$$

con $k(\tilde{s}_n)$ intero. D'altronde, essendo anche ovviamente $\varphi_0 \psi_0 = 1$, si ha $k(\tilde{s}_0) = 1$, cosicchè la (4.1.7) può provarsi per induzione supposto $k(\tilde{s}_{n-1}) = 1$. Ed invero, operando con ∂ su (4.1.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} \partial(i. + \eta.) \tilde{s}_n &= (i. + \eta.) \tilde{\partial} \tilde{s}_n = \tilde{\partial} \tilde{s}_n \quad \text{mod } T_{n-1}(X), \\ \partial k(\tilde{s}_n) \tilde{s}_n &= k(\tilde{s}_n) \partial \tilde{s}_n = k(\tilde{s}_n) \tilde{\partial} \tilde{s}_n \quad \text{mod } T_{n-1}(X), \end{aligned}$$

tenuto conto di (3.1.4), (3.1.5). Avuto riguardo alla (3.1.3) si ha dunque $k(\tilde{s}_n) = 1$ e la (4.1.7) è provata.

(6) Cfr. per esempio M. J. GREENBERG [4], p. 146-7.

4.2. La Proposizione (4.1.1) ha, al solito, quale immediata conseguenza il

(4.2.1) TEOREMA. — *La rappresentazione canonica φ_* , (4.1.2), induce equivalenze naturali tra i funtori omologici e coomologici singolari ordinari, definiti sulla categoria degli spazi topologici, e quelli di cui al n. 3.2:*

$$(4.2.2) \quad \varphi_* : H_*(; G) \xrightarrow{\cong} H_*^{\text{ori}}(; G) \quad , \quad \varphi^* : H_{\text{alt}}^*(; G) \xrightarrow{\cong} H^*(; G) .$$

La naturalità delle equivalenze discende dal fatto che, come subito si verifica, φ_* è una trasformazione naturale.

(4.2.3) OSSERVAZIONE I. — Il Teorema (4.2.1) si estende facilmente al caso in cui i funtori in considerazione siano definiti sulla categoria delle coppie di spazi o anche sulla categoria omotopica delle coppie di spazi.

(4.2.4) OSSERVAZIONE II. — Gli isomorfismi canonici ψ_*, ψ^* , che invertono gli isomorfismi (4.2.2), sono indotti dalla rappresentazione di catene $\psi_* : S_*^{\text{ori}}(X) \rightarrow S_*(X)$, (4.1.4), la quale tuttavia *non* è canonica (poichè dipende dalla scelta del complesso singolare normale $\tilde{S}_*(X)$, e dall'arbitrarietà insita nella costruzione della rappresentazione η_* ; n. 4.1).

Può chiedersi se possa determinarsi una rappresentazione di catene canonica che induca i detti isomorfismi ψ_*, ψ^* . Ciò è possibile quando il gruppo G sia un campo commutativo di caratteristica zero, come vedremo nel successivo n. 5 (Teorema 5.6.5). Mostriamo in un prossimo lavoro l'interesse di questo risultato.

5. CASO DEI COEFFICIENTI IN UN CAMPO DI CARATTERISTICA ZERO

5.1. Sia Γ un *campo di caratteristica zero* ⁽⁷⁾. Una cocatena di $S^n(X; \Gamma)$ è determinata dai valori ch'essa assume sui semplici singolari di $S_n(X)$. D'altronde tali valori determinano anche una forma lineare definita sullo spazio vettoriale su Γ , $S_n(X; \Gamma)$; e viceversa. Ne segue l'isomorfismo canonico:

$$(5.1.1) \quad S^*(X; \Gamma) \cong \text{Hom}(S_*(X; \Gamma), \Gamma) .$$

Potremo perciò identificare la coomologia $H^*(X; \Gamma)$ alla coomologia di $S_*(X; \Gamma)$ a valori in Γ :

$$(5.1.2) \quad H^*(X; \Gamma) \equiv H^*(S_*(X; \Gamma); \Gamma) .$$

Le cocatene di $S^n(X; \Gamma)$ che si annullano su $T_n(X)$, costituenti lo spazio vettoriale $S_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$, corrispondono nell'isomorfismo (5.1.1) alle cocatene definite su $S_n(X; \Gamma)$ e nulle su $T_n(X; \Gamma)$. Ricordando (3.2.1), si ha quindi l'isomorfismo canonico:

$$(5.1.3) \quad S_{\text{alt}}^*(X; \Gamma) \cong \text{Hom}(S_{\text{ori}}^*(X; \Gamma), \Gamma) ;$$

e, analogamente a (5.1.2), può assumersi l'identificazione:

$$(5.1.4) \quad H_{\text{alt}}^*(X; \Gamma) \equiv H^*(S_{\text{ori}}^*(X; \Gamma); \Gamma) .$$

(7) Le considerazioni del n. 5.1 sussistono anche se Γ è un anello con unità.

5.2. Diremo *catena alternante* una catena $\hat{c}_n \in S_n(X; \Gamma)$ che ha coefficienti alternanti $r, \varepsilon(\alpha)r$ ($r \in \Gamma$) sulle coppie di semplici associati $s_n, s_n\alpha$ (e, in particolare, nulli sui semplici degeneri; n. 2.1, 2)). Le catene alternanti costituiscono un sottospazio vettoriale di $S_n(X; \Gamma)$ che denoteremo con $\hat{S}_n(X; \Gamma)$.

Consideriamo l'endomorfismo di $S_n(X; \Gamma)$:

$$(5.2.1) \quad \pi_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\alpha_n} \varepsilon(\alpha_n) \alpha_n = \frac{1}{(n+1)!} \varepsilon_{i_0 \dots i_n} \hat{\alpha}^{i_0 \dots i_n},$$

dove al secondo membro la somma s'intende estesa a tutte le affinità α_n di Δ_n in sè (n. 1.1), e al terzo membro, in forma diversa ma equivalente, si sottintende di sommare rispetto a tutte le *permutazioni* $(i_0, \dots, i_n)$ di $(0, \dots, n)$.

È ovvio che π porta ogni semplice s_n in una catena alternante e quindi $S_n(X; \Gamma)$ in $\hat{S}_n(X; \Gamma)$, e che $\pi_n \hat{c}_n = \hat{c}_n$ per ogni $\hat{c}_n \in \hat{S}_n(X; \Gamma)$. Dunque π_n è un *proiettore* di $S_n(X; \Gamma)$ su $\hat{S}_n(X; \Gamma)$.

Diremo che π_n è l'*operatore di alternazione* sulle catene di $S_n(X; \Gamma)$.

5.3. Gli $\hat{S}_n(X; \Gamma)$ costituiscono le componenti di un sottocomplesso $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$ di $S_\bullet(X; \Gamma)$, che diremo *complesso delle catene singolari alternanti di X a valori in Γ* (8).

Per garantire che $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$ è di fatto un sottocomplesso di $S_\bullet(X; \Gamma)$ occorre mostrare che $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$ è stabile per l'operatore di bordo ∂ . Ciò risulterà implicitamente contenuto nel seguente

(5.3.1) LEMMA. - *Gli operatori di alternazione π_n definiscono una rappresentazione di catene $\pi_\bullet: S_\bullet(X; \Gamma) \rightarrow S_\bullet(X; \Gamma)$ che è un proiettore di $S_\bullet(X; \Gamma)$ su $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$. Indicata con $i_\bullet: \hat{S}_\bullet(X; \Gamma) \rightarrow S_\bullet(X; \Gamma)$ l'inclusione e con $\hat{\pi}_\bullet$ la $\pi_\bullet$ col codominio ristretto a $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$, si ha dunque: $\pi_\bullet = i_\bullet \hat{\pi}_\bullet$, $\pi_\bullet|_{\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)} = \hat{\pi}_\bullet i_\bullet = 1$.*

Si tratta di provare che $\partial\pi_n = \pi_{n-1}\partial$; ciò implica poi $\partial\hat{S}_n = \partial\pi_n S_n = \pi_{n-1}\partial S_n \subset \pi_{n-1}S_{n-1} = \hat{S}_{n-1}$, cosicchè $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$ è un sottocomplesso di $S_\bullet(X; \Gamma)$, come si è detto. Le altre affermazioni sono ovvie.

Si ha invece (n. 1.2):

$$(n+1)! \partial\pi_n s_n = \partial\varepsilon_{i_0 \dots i_n} s_n \alpha^{i_0 \dots i_n} = \varepsilon_{i_0 \dots i_n} \sum_{k=0}^n (-1)^k s_n \beta^{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n}.$$

Posto $i_k = p$, $(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_n) = (j_0^p \dots j_{p-1}^p)$ è una permutazione degli interi $(0, \dots, \hat{p}, \dots, n)$ la cui segnatura indicheremo con $\varepsilon_{j_0^p \dots j_{p-1}^p}$. Si ha:

$$(-1)^k \varepsilon_{i_0 \dots i_n} = \varepsilon_{i_k i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_n} = \varepsilon_{p 0 \dots \hat{p} \dots n} \varepsilon_{j_0^p \dots j_{p-1}^p} = (-1)^p \varepsilon_{j_0^p \dots j_{p-1}^p}.$$

Per ogni k fissato i termini che appaiono in $(n+1)! \partial\pi_n s_n$ si riducono allora alla stessa espressione e risulta:

$$(n+1)! \partial\pi_n s_n = (n+1) \sum_{p=0}^n (-1)^p \varepsilon_{j_0^p \dots j_{p-1}^p} s_n \beta^{j_0^p \dots j_{p-1}^p}.$$

D'altra parte si ha:

$$n! \pi_{n-1} \partial s_n = n! \pi_{n-1} \sum_{p=0}^n (-1)^p s_n \beta^{0 \dots \hat{p} \dots n} = \sum_{p=0}^n (-1)^p \varepsilon_{j_0^p \dots j_{p-1}^p} s_n \beta^{j_0^p \dots j_{p-1}^p};$$

ne segue quindi: $\partial\pi_n = \pi_{n-1}\partial$.

(8) In analogia con i simboli già usati, $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$ potrebbe denotarsi anche con $S_\bullet^{\text{alt}}(X; \Gamma)$. Non lo facciamo per evitare confusioni, dal momento che $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$ interviene soltanto in modo accessorio e non nelle definizioni di $H_\bullet^{\text{ori}}(X; \Gamma)$, $H_\bullet^{\text{alt}}(X; \Gamma)$.

5.4. Dimostriamo ora la

(5.4.1) PROPOSIZIONE. — *La rappresentazione di catene $\hat{\pi}_\bullet : S_\bullet(X; \Gamma) \rightarrow \hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$ si fattorizza canonicamente con un isomorfismo $\hat{\pi}'_\bullet : S_\bullet^{\text{ori}}(X; \Gamma) \xrightarrow{\cong} \hat{S}_\bullet(X; \Gamma)$, secondo il seguente diagramma commutativo, dove $\varphi_\bullet : S_\bullet(X; \Gamma) \rightarrow S_\bullet^{\text{ori}}(X; \Gamma) \equiv S_\bullet(X; \Gamma)/T_\bullet(X; \Gamma)$ denota la proiezione canonica:*

$$(5.4.2) \quad \begin{array}{ccc} S_\bullet(X; \Gamma) & \xrightarrow{\varphi_\bullet} & S_\bullet^{\text{ori}}(X; \Gamma) \\ & \searrow \hat{\pi}_\bullet & \downarrow \hat{\pi}'_\bullet \\ & & \hat{S}_\bullet(X; \Gamma) \end{array}$$

Poichè $\varphi_\bullet, \hat{\pi}_\bullet$ sono rappresentazioni di catene, basta mostrare che

$$(5.4.3) \quad \text{Ker } \pi_n = T_n(X; \Gamma).$$

A tale scopo osserviamo preliminarmente che, essendo $T_n(X; \Gamma)$ uno spazio vettoriale su Γ di caratteristica zero, possiamo considerare $T_n(X; \Gamma)$ generato dalle sole catene degeneri semplici del tipo $d_n = s_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha$ (n. 2.1.). Invero, così facendo, restano inclusi i semplici degeneri, perchè, se s_n è tale, $2 s_n$ è una catena degenera semplice e risulta $s_n = \frac{1}{2} (2 s_n)$. Si ha allora quanto segue.

1) $\text{Ker } \pi_n \supset T_n(X; \Gamma)$. — Infatti, essendo $\alpha, \alpha', \alpha''$ affinità di permutazione di Δ_n , risulta:

$$\begin{aligned} (n+1)! \pi_n d_n &= \sum_{\alpha'} (\varepsilon(\alpha') s_n \alpha' - \varepsilon(\alpha') \varepsilon(\alpha) s_n \alpha \alpha') \\ &= \sum_{\alpha'} \varepsilon(\alpha') s_n \alpha' - \sum_{\alpha''} \varepsilon(\alpha'') s_n \alpha'', \end{aligned}$$

con $\alpha'' = \alpha \alpha'$.

Siccome, fissata α , mentre α' descrive tutte le affinità di Δ_n in sè lo stesso accade di α'' , se ne trae $\pi_n d_n = 0$.

2) $\text{Ker } \pi_n \subset T_n(X; \Gamma)$. — Infatti, per ogni s_n singolare, si ha:

$$s_n - \pi_n s_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\alpha} (s_n - \varepsilon(\alpha) s_n \alpha),$$

onde risulta: $s_n - \pi_n s_n \in T_n(X; \Gamma)$. Più in generale, per ogni $c_n \in S_n(X; \Gamma)$, risulta anche:

$$c_n - \pi_n c_n \in T_n(X; \Gamma).$$

Se $\pi_n c_n = 0$, ne segue allora che $c_n \in T_n(X; \Gamma)$.

5.5. Ciò posto possiamo considerare le rappresentazioni di catene:

$$(5.5.1) \quad \varphi_\bullet : S_\bullet(X; \Gamma) \rightarrow S_\bullet^{\text{ori}}(X; \Gamma), \quad \chi_\bullet : S_\bullet^{\text{ori}}(X; \Gamma) \rightarrow \hat{S}_\bullet(X; \Gamma),$$

la prima delle quali è la proiezione canonica già considerata, (5.4.1), e la seconda è definita dal diagramma commutativo:

$$(5.5.2) \quad \begin{array}{ccc} S_\bullet^{\text{ori}}(X; \Gamma) & \xrightarrow{\chi_\bullet} & \hat{S}_\bullet(X; \Gamma) \\ \hat{\pi}'_\bullet \downarrow \cong & \nearrow i_\bullet & \\ \hat{S}_\bullet(X; \Gamma) & & \end{array}$$

La situazione espressa dalle (5.5.1) è analoga a quella data dalle (4.1.2), (4.1.4), *ma ora, non soltanto $\varphi_\bullet$, ma anche $\chi_\bullet$ è canonicamente definita*, in quanto sono canonicamente definiti $\hat{S}_\bullet(X; \Gamma), \hat{\pi}'_\bullet, i_\bullet$.

Dai diagrammi (5.4.2), (5.5.2) si ha immediatamente:

$$(5.5.3) \quad \varphi \cdot \chi = (\hat{\pi}')^{-1} \hat{\pi} \cdot i \cdot \hat{\pi}' = (\hat{\pi}')^{-1} \hat{\pi}' = 1$$

giacchè $\hat{\pi} \cdot i = 1$, (5.3.1). E inoltre: $\chi \cdot \varphi = i \cdot \hat{\pi}' \cdot \varphi = i \cdot \hat{\pi} = \pi$, sempre avuto riguardo a (5.3.1).

Poichè π ha portatore aciclico $P_*(s_n; \Gamma)$ (cfr. n. 4.1), se ne trae

$$(5.5.4) \quad \chi \cdot \varphi = \pi \simeq 1,$$

onde φ, χ sono equivalenze omotopiche di catene.

5.6. Una catena $c_n^{\text{ori}} \in S_n^{\text{ori}}(X; \Gamma)$ è data da una catena $c_n \in S_n(X; \Gamma) \bmod T_n(X; \Gamma)$; cioè $c_n^{\text{ori}} = \varphi_n c_n$. Pensando χ operante sulle catene $c_n \bmod T_n(X; \Gamma)$ rappresentanti le c_n^{ori} , χ deve sostituirsi con $\chi \cdot \varphi = \pi$, (5.5.4). Con tale intesa scriveremo anche:

$$(5.6.1) \quad \pi_* : S_*^{\text{ori}}(X; \Gamma) \xrightarrow{\cong} S_*(X; \Gamma).$$

Analogamente, applicando il funtore $\text{Hom}(_, \Gamma)$ alla precedente, e avuto riguardo alle (5.1.1), (5.1.3), si ha:

$$(5.6.2) \quad \pi^* : S^*(X; \Gamma) \xrightarrow{\cong} S_{\text{alt}}^*(X; \Gamma),$$

dove $\pi^* = \text{Hom}(\pi_*, \Gamma)$ è la rappresentazione di cocatene trasposta di π_* , definita dalla:

$$(5.6.3) \quad \langle c_n, \pi^n c^n \rangle = \langle \pi_n c_n, c^n \rangle,$$

essendo $c_n \in S_n(X; \Gamma)$ rappresentante di $c_n^{\text{ori}} = \varphi_n c_n$, $c^n \in S^n(X; \Gamma)$, e $\pi^n c^n = c_{\text{alt}}^n \in S_{\text{alt}}^n(X; \Gamma)$ una cocatena di $S^n(X; \Gamma)$ nulla su $T_n(X; \Gamma)$ (n. 5.1; e si ricordi la (5.4.3)).

Si noti che, denotata con $j^* = S_{\text{alt}}^*(X; \Gamma) \xrightarrow{\subset} S^*(X; \Gamma)$ l'inclusione, le (5.5.3), (5.5.4) danno precisamente, applicando $\text{Hom}(_, \Gamma)$:

$$(5.6.4) \quad \pi^* j^* = 1, j^* \pi^* \simeq 1.$$

Applicando infine il funtore omologico ai complessi di catene e di cocatene equivalenti omotopicamente (5.6.1), (5.6.2), tenuto conto delle identificazioni (5.1.2), (5.1.4), si ha quindi il

(5.6.5) TEOREMA. - *Le rappresentazioni di catene e cocatene π_* , π^* , canonicamente determinate, inducono le equivalenze naturali tra i funtori di omologia e coomologia singolari:*

$$(5.6.6) \quad \pi_* : H_*^{\text{ori}}(_, \Gamma) \xrightarrow{\cong} H_*(_, \Gamma), \quad \pi^* : H^*(_, \Gamma) \xrightarrow{\cong} H_{\text{alt}}^*(_, \Gamma),$$

essendo Γ un campo di caratteristica zero.

Il Teorema (5.6.4) risponde al quesito posto nella Osservazione (4.2.4). Precisamente, per $G = \Gamma$, gli isomorfismi φ_* , φ^* di cui in (4.2.2), hanno per inversi gli isomorfismi π_* ($= \psi_*$), π^* ($= \psi^*$), che risultano definiti, in termini di catene e cocatene, dalle rappresentazioni canoniche π_* , π^* , a loro volta definite dalle (5.2.1), (5.6.3).

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. EILENBERG, *Singular Homology Theory*, «Annals of Mathematics», 45, 407-447 (1944).
- [2] S. EILENBERG e N. STEENROD, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press (1952).
- [3] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958).
- [4] M. J. GREENBERG, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin Inc., New York (1967).