Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Radu Rosca, Bernard Rouxel, Lieven Vanhecke

Sur des variétés lorentziennes pseudo-isotropiquement immergées dans un espace de Minkowski

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.3-4, p. 261–265.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_3-4_261_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Geometria differenziale. — *Sur des variétés lorentziennes pseudo-isotropiquement immergées dans un espace de Minkowski.* Nota (*) di RADU ROSCA, BERNARD ROUXEL e LIEVEN VANHECKE, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. — In questa Nota si stabiliscono nuovi risultati concernenti le varietà V_{ps} pseudo-isotropicamente immerse in uno spazio di Minkowski generalizzato mediante l'introduzione di una certa struttura sulla V_{ps}.

Par définition [4], [5], [6] et [7] une C^∞-variété réelle et douée d'une immersion x non dégénérée dans une variété lorentzienne V_L, est dénommée *pseudo-isotrope* (notée V_{ps}), si la représentation sphérique par rapport à un vecteur appartenant au faisceau unitaire normal $T^\perp(V_{ps})$ associé à x, est *amétrique*.

On envisage dans la suite les cas d'une variété de codimension deux et d'une variété de dimension deux immergée dans un espace de Minkowski M^{n+2}.

1. V_L^n étant une C^∞-variété de codimension deux, on désigne par $x : V_L^n \to M^{n+2}$ une immersion de V_L^n dans un espace de Minkowski M^{n+2}. Si $F(V_L^n)$ et $F(M^{n+2})$ sont respectivement les faisceaux des repères orthonormés de V_L^n et M^{n+2}, soit $B \subset V_L^n \times F(V_L^n)$ le *fibré principal* des repères adaptés tels que les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ et $\boldsymbol{e}_{n+2}$ $(i, j, k = 1, \cdots, n-1)$ soient tangents à V_L^n et $\boldsymbol{e}_r$ $(r, s = n, n+1)$ soient normaux en $x(\boldsymbol{p})$ $(\boldsymbol{p} \in V_L^n)$. On note par $\boldsymbol{e}_{i^*}$ $(i_* = 1, \cdots, n+1)$ les vecteurs *spatiaux* d'un repère quelconque, par $T_{\boldsymbol{p}}(V_L^n)$ l'espace tangent en $\boldsymbol{p}$ à V_L^n et par $T_{\boldsymbol{p}}^\perp(V_L^n)$ l'espace totalement normal en $\boldsymbol{p}$. Si ω^i et ω_A^B $(A, B, C = 1, \cdots, n+2)$ sont les formes duales et les formes de connexion induites par x, on peut écrire

$$d\boldsymbol{p} = -\omega^i \otimes \boldsymbol{e}_i + \omega^{n+2} \otimes \boldsymbol{e}_{n+2}. \tag{1}$$

La connexion

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{e}_{i^*} &= \omega_{i^*}^A \otimes \boldsymbol{e}_A, \\ \nabla \boldsymbol{e}_{n+2} &= -\omega_{n+2}^{i^*} \otimes \boldsymbol{e}_{i^*} \end{aligned} \tag{2}$$

donne alors lieu aux équations de structure (les deux groupes):

$$\begin{aligned} d \wedge \omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^{n+2} \wedge \omega_{n+2}^i, \\ d \wedge \omega^{n+2} &= -\omega^j \wedge \omega_j^{n+2}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} d \wedge \omega_{i^*}^{j^*} &= \varepsilon_A \omega_{i^*}^A \wedge \omega_A^{j^*}, \qquad (\varepsilon_{i^*} = 1, \ \varepsilon_{n+2} = -1), \\ d \wedge \omega_{i^*}^{n+2} &= \omega_{i^*}^{j^*} \wedge \omega_{j^*}^{n+2}. \end{aligned} \tag{4}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 settembre 1972.

Le cas où l'immersion x est *pseudo-isotrope* ($V^n_L \equiv V^n_{ps}$) se scinde en trois cas:

a) La forme de torsion ω_n^{n+1} *(unique) est nulle.* Dans ce cas, à l'aide des équations (1)-(4), on arrive à la

PROPOSITION. *Dans la classe des immersions pseudo-isotropes* $x : V^n_{ps} \to M^{n+2}$ *il existe une sous-classe caractérisée par l'existence de vecteurs* $\mathbf{N} \in T^{\perp}_{\boldsymbol{p}}(V^n_{ps})$ *tels que x soit non substantielle. Dans ce cas la variété est une hypersurface pseudo-isotrope d'un espace de Minkowski* M^{n+1}. *(On trouve de cette manière les variétés étudiées dans* [4].)

b) La forme de torsion ω_n^{n+1} *est non nulle.* Eu égard à la définition donnée plus haut, on est amené à mettre en évidence une 1-forme $\omega \in \Lambda^1(V^n_{ps})$ (dénommée *forme caractéristique*) définie par

$$\omega = \omega_n^{n+2},$$

et deux vecteurs *isotropes* $\mathbf{I}_r$ conformes aux différentielles des vecteurs $\boldsymbol{e}_r$. Ceci nous mène à la

PROPOSITION. *La forme caractéristique* ω *de* $V^n_{ps} \subset M^{n+2}$ *est complètement intégrable; une* V^n_{ps} *de la famille considérée est le lieu d'un* $(n-1)$*-plan osculateur à une courbe gauche de* M^{n+2} [2].

Dans l'hypothèse où la dimension $n = 2p + 1$, on considère sur la variété V^n_{ps} la *structure presque cosymplectique* $\mathrm{C}(\Omega, \alpha)$ définie par

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 + \cdots + \omega^{n-2} \wedge \omega^{n-1}, \qquad \alpha = \omega^{n+2}. \tag{5}$$

Notons par $\mathbf{E}$, $\mathbf{I}_s$ et $S_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y})$ respectivement le *champ de Reeb* associé à C, la composante spatiale commune des $\mathbf{I}_r$, le *shape operator* [3] de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Nous énonçons la

PROPOSITION. *Soit une variété* V^{2p+1}_{ps} *sur laquelle on considère une structure presque cosymplectique* $\mathrm{C}(\Omega, \alpha)$ *définie par* (5) *et soit* $\boldsymbol{l}(\omega)$ *la parenthèse de Lagrange correspondant à la forme caractéristique de la variété. Alors on a les propriétés suivantes*:

(*i*) $\langle \boldsymbol{l}(\omega), \mathbf{I}_s \rangle = 0$;

(*ii*) $S_{\boldsymbol{l}(\omega)}(\mathbf{I}_s) = 0$ *et* $S_{\boldsymbol{l}(\omega)}(\mathbf{E}) = 0$;

(*iii*) *Si* $\langle \mathbf{I}, \boldsymbol{e}_n \rangle$ *(ou* $\langle \mathbf{I}, \boldsymbol{e}_{n+1} \rangle$) *est constant, une condition nécessaire et suffisante pour que* ω *soit une forme* $\mathbf{E}$*-invariante relativement à* $\mathrm{C}(\Omega, \alpha, \mathbf{E})$ *est que la courbure moyenne de* V^n_{ps} *soit constante.*

c) Les formes de connexion mixtes spatiales ω_i^n, ω_i^{n+1} *sont toutes nulles.* Dans ce cas la structure presque cosymplectique (5) est telle que α est égale à la forme caractéristique ω de V^n_{ps}; la variété asymptotique définie par $\omega = 0$ est *totalement géodésique* et est contenue en tant que variété spatiale dans un sous-espace linéaire de M^{n+2}.

2. Des considérations analogues pour les V_{ps}^2 bidimensionnelles mettent encore en évidence la 1–forme ω et des vecteurs $\mathbf{I}_r$ qui paraissent ainsi étroitement liés à l'étude de toute V_{ps}. Dans le cas particulier où l'immersion $x : V_{ps}^2 \rightarrow M^{n+2}$ est à formes de connexion normales nulles, la variété est un *cylindre isotrope* se rapprochant par cela des variétés cylindriques isotropes déjà signalées par E. Cartan dans E_3 [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CARTAN, *La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile*, « Bull. Sc. Math. », 2e série, *34* (1910).

[2] E. CARTAN, *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien*, « Bull. Soc. Math. France », *47* (1919) et *48* (1920).

[3] T. ŌTSUKI, *On principal normal vector fields of submanifolds in a Riemannian manifold of constant curvature*, « Journ. Math. Soc. Japan », *22*, 1 (1970).

[4] R. ROSCA, *Les hypersurfaces pseudo–isotropes dans un espace de Minkowski*, « Bull. Cl. Sc. Acad. Roy. Belg. », 5e série, *56*, 4 (1970).

[5] R. ROSCA, *Sur les variétés pseudo–isotropes immergées dans une variété lorentzienne*, « Revue Roum. Math. Pures et Appl. », *15*, 9 (1970).

[6] R. ROSCA, *Les variétés pseudo–isotropes dans un espace temps de Minkowski*, « C. R. Acad. Sc. Paris », *270*, série A, 1071–1073 (1970).

[7] R. ROSCA et L. VANHECKE, *Sur une classe de variétés pseudo–isotropes*, sous presse.