Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Roberto Infantino

Una estensione di un teorema di E.M. Stein relativo agli integrali singolari. Applicazione alle equazioni ellittiche. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.3-4, p. 234–240.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_3-4_234_0>

Analisi matematica. — *Una estensione di un teorema di E.M. Stein relativo agli integrali singolari. Applicazione alle equazioni ellittiche* (*). Nota II(**) di ROBERTO INFANTINO, presentata dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We complete in this Nota II the result of the Nota I and we use it in order to generalize some theorems on elliptic equations.

2. Sia V'_h una varietà di $\mathbf{R}^n$ ad $h < n$ dimensioni che goda delle seguenti proprietà:

a) esista un diffeomorfismo $x_i = \varphi_i(x')$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, di $\mathbf{R}^n$ in sè, che muti V'_h nella varietà di equazioni $x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_s = 0$, $s = n - h$, tale che le derivate di φ_i e $\psi_i = \varphi_i^{-1}$, $(i = 1, \cdots, n)$, siano limitate;

b) dette $\delta(x')$ e $\delta^*(x')$ rispettivamente la distanza di x' dalla varietà $x'_1 = \cdots = x'_s = 0$ e dalla varietà $x'_{s+1} = \cdots = x'_n = 0$, esistano una costante $\sigma > 1$ e tre costanti positive a, b, γ per cui riesca:

$$a\delta(x') \leq \rho(x) \leq b\delta(x') \tag{2.1}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \quad |\rho(x) - \rho(y)| \leq \gamma [|\delta(x') - \delta(y')| + |\delta^*(x') - \delta^*(y')|^\sigma]. \tag{2.2}$$

TEOREMA 2.1. – *Il Teorema 1.1 continua a valere anche se nella definizione dello spazio $L^p_\mu(\mathbf{R}^n)$ sostituiamo la funzione $\delta(x)$, che esprime la distanza del punto $x \in \mathbf{R}^n$ dalla varietà $x_1 = \cdots = x_s = 0$, con la funzione $\rho(x)$ ora introdotta.*

Invero basta far vedere che il Lemma 1.1 continua a sussistere se al nucleo $K(x, y)$ subentra il nucleo

$$K_1(x, y) = |1 - \lambda_1^{-\beta}| \, |x - y|^{-n},$$

dove:

$$\lambda_1 = \frac{\rho(y)}{\rho(x)} = \frac{\rho[\varphi(y')]}{\rho[\varphi(x')]}.$$

Essendo:

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^n} K_1(x, y) f(y) \, dy \right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq c \left\| \int_{\mathbf{R}^n} K_1[\varphi(x'), \varphi(y')] f[\varphi(y')] \, dy' \right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)},$$

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1972.

si ha:

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{K}_1(x\,,y) f(y)\, \mathrm{d}y \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)} \le c \sum_{k=1}^{3} \left\| \int_{\mathrm{J}_k} \mathrm{K}_1[\varphi(x')\,,\varphi(y')] f[\varphi(y')]\, \mathrm{d}y' \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)},$$

dove:

$$\mathrm{J}_1 = \{y' : 0 \le \lambda_1 \le \gamma_1\} \quad , \quad \mathrm{J}_2 = \{y' : \gamma_1 < \lambda_1 < \gamma_2\} \quad , \quad \mathrm{J}_3 = \{y' : \lambda_1 \ge \gamma_2\}\,,$$

con $\gamma_1 = \frac{a}{2b}$, $\gamma_2 = \frac{2b}{a}$.

Ora si osservi che, posto

$$\lambda = \frac{\delta(y')}{\delta(x')}\,,$$

si ha per la (2.1)

$$\frac{a}{b}\lambda \le \lambda_1 \le \frac{b}{a}\lambda\,.$$

Inoltre è anche

$$|x' - y'| \le c\,|\varphi(x') - \varphi(y')|\,.$$

Pertanto per $y' \in \mathrm{J}_1 \cup \mathrm{J}_3$ si ha:

$$|\mathrm{K}_1[\varphi(x')\,,\varphi(y')]| \le c\mathrm{K}(x'\,,y') \quad , \quad \lambda \in \left[0\,,\frac{1}{2}\right] \cup [2\,,+\infty[\,.$$

Ne segue, per quanto visto nel n. 1,

$$\left\| \int_{\mathrm{J}_1 \cup \mathrm{J}_3} \mathrm{K}_1[\varphi(x')\,,\varphi(y')] f[\varphi(y')]\, \mathrm{d}y' \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)} \le \mathrm{C}_{p,\beta} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)}\,.$$

Resta da maggiorare la norma dell'integrale esteso a J_2. Ora si ha:

$$|1 - \lambda_1^{-\beta}| \le |\beta| \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{\rho^{-\beta}(x)} \max\{\rho^{-\beta-1}(x)\,,\rho^{-\beta-1}(y)\}$$

e quindi risulta in J_2, tenendo conto delle (2.1), (2.2)

$$|1 - \lambda_1^{-\beta}| \le c_1 \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{\delta(x')} \le c_2 \frac{|\delta(x') - \delta(y')| + |\delta^*(x') - \delta^*(y')|^\sigma}{\delta(x')} \le$$

$$\le c_2\left(|1 - \lambda| + \frac{|t' - z'|^\sigma}{|u'|}\right)^{(1)}.$$

Tenendo presente che in J_2 riesce:

$$2\gamma_1^2 \le \lambda \le \frac{1}{2}\gamma_2^2\,,$$

si ha:

$$|u'| \ge c\,|u' - v'| \quad , \quad |1 - \lambda| \le c\,|1 - \lambda^2|$$

(1) In questo numero $u'\,,t'\,,v'\,,z'$ hanno l'analogo significato di $u\,,t\,,v\,,z$ introdotti nel n. 1 della Nota I; inoltre $c\,,c_1\,,\cdots$, indicano, come nella Nota I, costanti che non dipendono da f.

e quindi, posto $\sigma = 1 + 2\varepsilon$, si ha ancora:

$$\frac{|1-\lambda_1^{-\beta}|}{|x-y|^n} \leq c_3\left(\frac{|1-\lambda^2|}{|x'-y'|^n} + \frac{1}{|u'-v'|^{s-\varepsilon}\,|t'-z'|^{h-\varepsilon}}\right).$$

Tenendo di nuovo presente quanto si è visto nel n. 1, ci resta da far vedere che:

$$\left\| \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{N}(x', y')\,\mathrm{F}(y')\,\mathrm{d}y' \right\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)},$$

dove:

$$\mathrm{F}(y') = f[\varphi(y')],$$

$$\mathrm{N}(x', y') = \begin{cases} |u'-v'|^{\varepsilon-s}\,|t'-z'|^{\varepsilon-h} & \text{per } \lambda \in \mathrm{J}' \\ 0 & \text{per } \lambda \notin \mathrm{J}', \end{cases} \qquad \mathrm{J}' = \left[2\gamma_1^2, \frac{1}{2}\gamma_2^2\right].$$

Poniamo

$$\mathrm{U}(x') = \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{N}(x', y')\,\mathrm{F}(y')\,\mathrm{d}y' \quad , \quad \mathrm{G}_{v'}(t') = \int_{\mathbf{R}^h} \frac{\mathrm{F}(v', z')}{|t'-z'|^{h-\varepsilon}}\,\mathrm{d}z',$$

$$\mathrm{G}^*(v') = \left(\int_{\mathbf{R}^h} |\mathrm{F}(v', z')|^p\,\mathrm{d}z'\right)^{1/p}.$$

Applicando la diseguaglianza di Minkowski (2), osservato che

$$\left[\int_{\mathbf{R}^h} |\mathrm{G}_{v'}(t')|^p\,\mathrm{d}t'\right]^{1/p} \leq c\mathrm{G}^*(v'),$$

si ha:

$$\left[\int_{\mathbf{R}^h} |\mathrm{U}(u', t')|^p\,\mathrm{d}t'\right]^{1/p} \leq c\int_{\mathbf{R}^s} \frac{\mathrm{G}^*(v')}{|u'-v'|^{s-\varepsilon}}\,\mathrm{d}v'.$$

Ne viene:

$$\|\mathrm{U}\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)} \leq c_1\left[\int_{\mathbf{R}^s} \mathrm{d}u'\left(\int_{\mathbf{R}^s} \frac{\mathrm{G}^*(v')}{|u'-v'|^{s-\varepsilon}}\,\mathrm{d}v'\right)^p\right]^{1/p}$$

$$\leq c_1\left[\int_{\mathbf{R}^s} |\mathrm{G}^*(v')|^p\,\mathrm{d}v'\right]^{1/p} = c_1\,\|\mathrm{F}\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)} \leq c_2\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)}.$$

Sia ora S una varietà di $\mathbf{R}^n$ ad $h = n - s$ dimensioni e sia $\{\mathrm{S}_1, \cdots, \mathrm{S}_\mathrm{N}\}$ una partizione di S tale che ogni varietà S_i sia una porzione di una varietà V_h^i che goda delle proprietà *a*), *b*) della varietà V_h'.

(2) Cfr. (1) della Nota I.

Indichiamo con $\bar{\rho}_i(x)$ e $\rho_i(x)$ rispettivamente la distanza del punto x da V_h^i e da S_i, $(i = 1, \cdots, N)$.

Supponiamo che esistano un insieme K e una costante k tali che

$$\forall x \in K \qquad \rho_i(x) \leq k\bar{\rho}_i(x) . \tag{2.3}$$

OSSERVAZIONE 2.1. – Nel caso in cui $-\frac{s}{p} < \beta < 0$, il Teorema 2.1 vale anche se $\rho(x)$ rappresenta la distanza del punto x dalla varietà S ora introdotta, purché la funzione f abbia il supporto contenuto in K.

Invero, posto

$$L_i = \{x : \rho_i(x) < \rho_j(x) \quad \forall j \neq i\} ,$$

tenendo conto del Teorema 2.1, del fatto che $\beta < 0$ e della (2.3), riesce:

$$\| \rho^\beta Tf \|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = \sum_{i=1}^{N} \| \rho_i^\beta Tf \|_{L^p(L_i)} \leq C_{p,\beta} \sum_{i=1}^{N} \| \bar{\rho}_i^\beta f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leq kNC_{p,\beta} \| \rho^\beta f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)} .$$

3. Indichiamo con S_R la sfera $\{x \in \mathbf{R}^n : |x| < R\}$ e con Σ_R la semisfera $\{x \in R^n : |x| < R , x_n > 0\}$; con G l'uno o l'altro dei due insiemi S_R e Σ_R.

Sia, poi, $\delta(x)$ la funzione, già introdotta nel n. 1, che esprime la distanza del punto $x \in \mathbf{R}^n$ dalla varietà ad $h < n$ dimensioni $x_1 = \cdots = x_s = 0$, $s = n - h$.

Indichiamo con $L_\mu^p(G)$, μ reale e $0 < p < +\infty$, lo spazio delle funzioni $u(x)$ tali che $\delta^\mu u \in L^p(G)$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ è una n–pla di interi non negativi, poniamo:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad , \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} ,$$

dove:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} , \qquad i = 1, \cdots, n .$$

Con $W_\mu^{j,p}(G)$ (3), j intero ≥ 0, p reale > 1 e μ reale, denotiamo lo spazio delle distribuzioni su G tali che $D^\alpha u \in L^p_{\mu - j + |\alpha|}(G)$ per $|\alpha| \leq j$, munito della norma:

$$\|u\|_{W_\mu^{j,p}(G)} = \sum_{i=0}^{j} \sup_{|\sigma| = i} \|D^\sigma u\|_{L^p_{\mu - j + |\sigma|}(G)} .$$

Poniamo ancora:

$$\|u\|_{j, L_\mu^p(G)} = \left(\int_G \sum_{|\alpha| \leq j} \delta^{\mu p} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} ,$$

$$(f, g)_G = \int_G f \cdot \bar{g} \, dx \quad , \quad \delta_h u = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} ,$$

essendo $h = (h_1, \cdots, h_n)$ un vettore reale non nullo.

(3) Cfr. [6].

Consideriamo l'operatore $A(D) = \sum_{|x|=2n} a_\alpha D^\alpha$ a coefficienti complessi e costanti di tipo ellittico.

Indichiamo con $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ il generico punto di $\mathbf{R}^{n-1}$ e poniamo $x = (x', x_n)$, $D_{x'} = (D_1, \cdots, D_{n-1})$ e $D = (D_{x'}, D_n)$.

Scritto l'operatore $A(D)$ nella forma $A(D_{x'}, D_n)$, supporremo che esso sia propriamente ellittico, che cioè per ogni fissato vettore reale ξ' il polinomio $A(\xi', \xi_n)$ abbia esattamente m radici con parte immaginaria positiva.

I due lemmi seguenti sono fondamentali per l'estensione dei teoremi di regolarizzazione agli spazi L^p_μ delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche.

Essi sono un'estensione dei Lemmi 4.1 e 4.2 del lavoro [1] di S. Agmon e si dimostrano seguendo la dimostrazione di questi, facendo uso però del Teorema 1.1 della presente Nota, anzichè del ben noto teorema di Calderon e Zygmund [2].

LEMMA 3.1. – *Data una funzione* $f \in C_0^\infty(S_R)$ *esiste una funzione* $v \in C^\infty(\bar{S}_R)$ *tale che*:

$$Av = f \qquad \text{in } \bar{S}_R$$

e

$$\|v\|_{2m, L^p_\mu(S_R)} \le C \|f\|_{L^p_\mu(S_R)} \quad , \quad -\frac{s}{p} < \mu < \frac{s}{p'} ,$$

dove C *è una costante dipendente soltanto da* n, m, p, R, λ *e* μ (*ma non da* f *o* v).

LEMMA 3.2. – *Data una funzione* $f \in C_0^\infty(\Sigma_R)$ *esiste una funzione* $v \in C^\infty(\bar{\Sigma}_R)$ *tale che*:

$$Av = f \qquad in \ \bar{\Sigma}_R$$

$$D_n^j v = 0 \qquad per \ x_n = 0 \qquad (|x| \le R), \ j = 0, \cdots, m-1,$$

e

$$\|v\|_{2m, L^p_\mu(\Sigma_R)} \le C \|f\|_{L^p_\mu(\Sigma_R)} \quad , \quad -\frac{s}{p} < \mu < \frac{s}{p'} ,$$

dove C *è una costante che dipende soltanto da* n, m, p, R, λ *e* μ.

Consideriamo ora un operatore lineare propriamente ellittico di ordine $2m$, a coefficienti variabili definiti nella chiusura $\bar{G}$ dell'aperto G:

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha . \tag{3.1}$$

Indichiamo con A' la parte principale di A e supponiamo che esista una costante $\lambda \ge 1$ tale che:

$$\frac{1}{\lambda} |\xi|^{2m} \le |A'(x, \xi)| \le \lambda |\xi|^{2m} ,$$

per tutti i vettori reali ξ e $x \in \bar{G}$.

Diremo con Agmon che i coefficienti di A soddisfano la condizione $\{j, K\}$ (in G), j essendo un intero positivo e $K > 0$, se

(i) $$a_\alpha \in C^{|\alpha|+j-2m}(\bar{G}) \qquad \text{per} \quad |\alpha| > 2m - j,$$

mentre i rimanenti coefficienti sono funzioni misurabili e limitate in G.
(ii) In G valgono le seguenti diseguaglianze

$$|D^\beta a_\alpha| \leq K \qquad \text{per} \quad |\alpha| > 2m - j$$

e

$$|a_\alpha| \leq K \qquad \text{per} \quad |\alpha| \leq 2m - j.$$

Tenendo conto del Lemma 3.1 e seguendo la dimostrazione del Lemma 5.1 della Memoria [1] di S. Agmon si ricava il seguente Lemma 3.3, che estende l'analogo Lemma 5.1 di [1].

LEMMA 3.3. – *Sia* A *l'operatore* (3.1) *definito in* $\bar{S}_R$, *con i coefficienti* a_α *soddisfacenti la condizione* $\{1; K\}$. *Sia inoltre* u *una funzione di classe* $L^p_\mu(S_R)$, *con* $p > 1$ *e* $-\frac{s}{p} < \mu < \frac{s}{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *tale che*:

$$|(u, A\varphi)_{S_R}| \leq C \|\varphi\|_{2m-1, L^{p'}_{-\mu}(S_R)} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(S_R).$$

Allora esiste un numero positivo $r_0 < R$ *ed una costante* c_0 *tale che*:

$$\|\delta_h u\|_{L^p_\mu(S_{r_0})} \leq c_0 (C + \|u\|_{L^p_\mu(S_R)}),$$

per tutti i vettori h *con modulo sufficientemente piccolo. Sia* r_0 *che* c_0 *dipendono soltanto da* n, m, p, R, K, λ *e* μ.

Dal Lemma 3.3 con ragionamenti simili a quelli tenuti da S. Agmon (4) per dimostrare il Corollario 5.1 di [1], si ricava il seguente

COROLLARIO 3.1. – *Siano verificate le condizioni del Lemma 3.3. Allora* $u \in W^{1,p}_\mu(\Omega)$ *per ogni aperto* Ω, *con* $\bar{\Omega} \subset S_R$. *Inoltre*, $\forall R' < R$ *riesce*:

$$\|u\|_{1, L^p_\mu(S_{R'})} \leq c_1 (C + \|u\|_{L^p_\mu(S_R)}),$$

dove c_1 *è una costante che dipende soltanto da* $m, n, p, \lambda, K, \mu, R$ *ed* R'.

Passiamo ora ad enunciare l'estensione del Teorema 6.1 di [1].

TEOREMA 3.1. – *Sia* A *l'operatore* (3.1) *definito in* $\bar{S}_R$, *con i coefficienti* a_α *che soddisfano la condizione* $\{j, K\}$, *essendo* j *un intero tale che* $1 \leq j \leq 2m$. *Sia, inoltre,* u *una funzione tale che* $u \in L^q_\mu(\Omega)$, *per ogni aperto* Ω *tale che* $\bar{\Omega} \subset S_R$, *con* $q > 1$, $-\frac{s}{p} < \mu < \frac{s}{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *e tale che*:

$$|(u, A\varphi)_{S_R}| \leq C \|\varphi\|_{2m-j, L^{p'}_{-\mu}(S_R)},$$

dove C *è una costante.*

(4) I Lemmi 3.1, 3.2, 3.3 e 3.3′ della Memoria [1] si estendono facilmente agli spazi $W^{j,p}_\mu$, tenendo presente che il duale dello spazio $L^p_\mu(\Omega)$, $1 < p < \infty$, μ reale, è lo spazio $L^{p'}_{-\mu}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (cfr. Lemma 1.3 di [6]) e quindi che lo spazio $L^p_\mu(\Omega)$ è riflessivo.

Allora si ha $u \in W_{\mu}^{j,p}(\Omega)$ *per ogni aperto* Ω *tale che* $\overline{\Omega} \subset S_R$. *Inoltre, se* $0 < R' < R$ *ed* $R_1 = \dfrac{R+R'}{2}$, *riesce*:

$$\|u\|_{j,L_{\mu}^{p}(S_{R'})} \leq c_1 (C + \|u\|_{L_{\mu}^{p}(S_{R_1})}),$$

dove c_1 *è una costante che dipende soltanto da* $n, m, p, \lambda, K, \mu, R$ *ed* R'.

Questo teorema si dimostra senza difficoltà seguendo il ragionamento di S. Agmon, utilizzando il Corollario 3.1.

Analogamente il Lemma 3.2 permette di dare del Lemma 5.2 e del successivo Corollario 5.2 di [1] un'estensione simile a quella che, per il Lemma 5.1 e successivo Corollario 5.1 di [1], è fornita dal nostro Lemma 3.3 e dal suo corollario.

Dopo ciò, ripetendo i ragionamenti di Agmon, si dimostra che:

TEOREMA 3.2. – *Sia* A *l'operatore* (3.1) *definito in* Σ_R, *con i coefficienti* a_α *che soddisfano la condizione* $\{j, K\}$, *essendo* j *un intero tale che* $1 \leq j \leq 2m$.

Sia u *una funzione di classe* $L_{\mu}^{q}(\Sigma_R)$, *con* $q > 1$, $-\dfrac{s}{p} < \mu < \dfrac{s}{p'}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *tale che*

$$|(u, A\varphi)_{\Sigma_R}| \leq C \|\varphi\|_{2m-j, L_{-\mu}^{p'}(\Sigma_R)}$$

per tutte le funzioni $\varphi \in C^{\infty}(\overline{\Sigma}_R)$ *che soddisfano le condizioni* [(5)]:

$$\begin{cases} D_n^k \varphi = 0 & \textit{su } \partial_1 \Sigma_R \quad \textit{per } k = 0, \cdots, m-1, \\ \varphi \equiv 0 & \textit{in un intorno di } \partial_2 \Sigma_R, \end{cases}$$

dove C *è una costante.*

Allora $u \in W_{\mu}^{j,p}(\Sigma_{R'})$ *per ogni* $R' < R$.

Inoltre, posto $R_1 = (R + R')/2$, *riesce*:

$$\|u\|_{j,L_{\mu}^{p}(\Sigma_{R'})} \leq c_1 (C + \|u\|_{L_{\mu}^{p}(\Sigma_{R_1})}),$$

dove c_1 *è una costante che dipende soltanto da* $n, m, p, \lambda, \mu, K, R$ *ed* R'.

OSSERVAZIONE 3.1. – Se nelle dimostrazioni dei Teoremi II e III di [4], si fa uso dei Teoremi 3.1. e 3.2 di questo lavoro, anzichè dei Teoremi 6.1 e 6.2 del lavoro [1], si semplifica la dimostrazione e si vede facilmente che i teoremi valgono ancora imponendo ad α la condizione $\alpha < \dfrac{n-h}{2} - 2m$, invece della

$$\alpha < \inf\left(\lambda - \frac{hm}{n}, \frac{n-h}{2} - 2m\right).$$

(5) Con $\partial_1 \Sigma_R$ indichiamo quella parte della frontiera $\partial\Sigma_R$ che si trova sull'iperpiano $x_n = 0$, e con $\partial_2 \Sigma_R$ la parte che si trova sull'ipersfera $|x| = R$.