Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Solutions bornées ou presque périodiques dell'équation non linéaire de la corde vibrante. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.3-4, p. 229–233.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_3-4_229_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1972 (Settembre–Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Solutions bornées ou presque périodiques de l'équation non linéaire de la corde vibrante.* Nota III [(*)] di MARCO BIROLI [(**)], presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema 2 enunciato nella Nota I.

§ 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Considérons les problèmes.

$$(5,1_n) \qquad \begin{aligned} & u''(t) + Au(t) + \sigma(t) = f(t) \quad \text{dans} \quad H^{-1}(a\,,b) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [-n\,,+\infty[\\ & u(-n) = u'(-n) = 0 \\ & \sigma(t) \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(-n\,,+\infty\,; \mathcal{L}^1(a\,,b))\,, \\ & \sigma(t\,,x) \in \beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\,u(t\,,x)\right) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [-n\,,+\infty[\times]a\,,b[\end{aligned}$$

n entier positif.

Le problème $(5,1_n)$ a, $\forall n$, une solution $u_n(t)$.

Du Lemme 2 on a

$$(5,2) \qquad \| u_n(t) \|_E \leq c$$

et du Lemme 3 on a que les $u_n(t)$ sont equicontinues dans E.

(*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1972.

(**) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

De (5,2) on a aussi

$$\int_t^{t+1} \| u_n'(\eta) \|_{\mathfrak{L}^\rho}^\rho \, d\eta \leq c_1 \tag{5,3}$$

$t \in [-n, +\infty[$

$$\int_t^{t+1} \int_a^b \sigma_n(\eta, x) \frac{\partial}{\partial t} u_n(\eta, x) \, d\eta \leq c_2 \tag{5,4}$$

$t \in [-n, +\infty[$.

Pour le Lemme 1 on a alors

$$\int_t^{t+1} \int_a^b |\sigma_n(\eta, x)| \, d\eta \, dx \leq c_3 . \tag{5,5}$$

On peut alors, fixé $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $t_1 < t_2$, affirmer, sans perdre de generalité, que

$$\lim_{n\to\infty}^{*} u_n(t) = u(t) \tag{5,6}$$

uniformément sur $[t_1, t_2]$ dans E.

On peut aussi supposer, sans perdre de generalité, que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \tag{5,7}$$

dans $\mathfrak{L}^2(a, b)$ uniformément sur $[t_1, t_2]$.

Étant $\{u_n'(t)\}$ equi-continues dans $\mathfrak{L}^2(a, b)$, on a alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(t) = u(t) \tag{5,8}$$

dans $\mathfrak{L}^2(a, b)$ uniformément sur $[t_1, t_2]$.

De (5,4) on a aussi, au moins d'extraction de sous-suites,

$$\lim_{n\to\infty}^{*} \sigma_n = \sigma \tag{5,9}$$

dans $\mathfrak{L}^1([t_1, t_2] \times]a, b[)$, où $\sigma(t, x) \in \mathfrak{L}^1(t_1, t_2; \mathfrak{L}^1(a, b))$ et $\sigma(t, x) \in \beta\left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\right)$ p.p. dans $[t_1, t_2] \times]a, b[$.

De (5,6) et (5,9) on deduit que $u(t)$ est solution du problème (1,4).

De (5,2) et (5,3) on a

$$\| u(t) \|_{\mathrm{E}} \leq c$$

$$\int_t^{t+1} \| u'(\eta) \|_{\mathfrak{L}^\rho}^\rho \, d\eta \leq c_1$$

et, en plus, de la equicontinuité sur $\mathbf{R}$ dans E de $\{u_n(t)\}$ on a que $u(t)$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ dans E.

La partie de la thèse concernante l'existence est ainsi démontrée.

Soient maintenant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions bornées et uniformement continues sur **R** dans l'espace de l'energie de (1,4) et posons $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

On a

$$(5,10) \qquad \| w(t_2)\|_E^2 - \| w(t_1)\|_E^2 + 2\alpha \int_{t_1}^{t_2} \| w'(t)\|_{\mathfrak{L}^\rho}^\rho \, dt \leq 0 .$$

La fonction $\| w(t)\|_E$ est donc bornée et decroissante; on a alors

$$\lim_{t \to -\infty} \| w(t)\|_E = N < +\infty .$$

De (5,10) on a

$$(5,11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \| w'(t)\|_{\mathfrak{L}^\rho}^\rho \, dt < +\infty$$

donc

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^{t+1} \| w'(\eta)\|_{\mathfrak{L}^\rho}^\rho \, d\eta = 0$$

donc

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^{t+1} \| w'(\eta)\|_{\mathfrak{L}^2}^2 \, d\eta = 0 .$$

On a alors

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^{t+1} \| w(\eta)\|_{H_0^1}^2 \, d\eta = N^2 .$$

Considérons, maintenant, les fonction $w(t-n)$, n entier positif.

De (5,11) on a

$$(5,12) \qquad \lim_{n \to -\infty} \int_0^1 \| w'(t-n)\|_{\mathfrak{L}^\rho}^\rho \, dt = 0 .$$

On peut aussi supposer sans perdre de generalité

$$(5,13) \qquad \lim_{n \to \infty}{}^* \, u_1(t-n) = u_{1,\infty}(t)$$

$$(5,14) \qquad \lim_{n \to \infty}{}^* \, u_2(t-n) = u_{2,\infty}(t)$$

dans E uniformément sur [0, 1].

Par le même procedé utilisé dans la première partie de la démonstration on a aussi

$$\lim_{n \to \infty} u_1'(t-n) = u_{1,\infty}'(t)$$

$$\lim_{n \to \infty} u_2'(t-n) = u_{2,\infty}'(t)$$

dans $\mathfrak{L}^2(a\,,b)$ uniformément sur $[0\,,1]$, et on peut supposer, sans perdre de generalité,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\ \sigma_1(t-n)=\sigma_{1,\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\ \sigma_2(t-n)=\sigma_{2,\infty}$$

où $\sigma_{1,\infty}\,,\sigma_{2,\infty}\in\mathfrak{L}^1(0\,,1\,;\mathfrak{L}^1(a\,,b))$ et $\sigma_{1,\infty}(t\,,x)\in\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}u_{1,\infty}(t\,,x)\right)$, $\sigma_{2,\infty}(t,x)\in\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}u_{2,\infty}(t\,,x)\right)$ p.p. sur $[0\,,1]\times]a\,,b[$.

De (5,12) on a $u'_{1,\infty}(t)=u'_{2,\infty}(t)$ et, posé $w_\infty(t)=u_{1,\infty}(t)-u_{2,\infty}(t)$, on a

$$w_\infty(t)=w_\infty \tag{5,15}$$

$$Aw_\infty=\sigma_{1,\infty}-\sigma_{2,\infty}\in\mathfrak{L}^1(0\,,1\,;\mathfrak{L}^1(a\,,b))\,.$$

Par le même procedé utilisé dans [1] pag. 148, on a $w_\infty=0$.

De (1,4) on a

$$\int_0^1\|w(t-n)\|^2_{H_0^1}\,dt=-(w'(1-n)\,,w(1-n))_{\mathfrak{L}^2}+(w'(-n)\,,w(-n))-$$
$$-\int_0^1\int_a^b(\sigma_1(t-n\,,x)-\sigma_2(t-n\,,x))\,(u_1(t-n\,,x)-u_2(t-n\,,x))\,dt\,dx\,.$$

De (5,13) (5,14) et (5,15) on a

$$\lim_{n\to\infty}w(t-n)=0 \tag{5,16}$$

uniformément sur $[0\,,1]$ dans $\mathfrak{L}^\infty(a\,,b)$.

Du Lemme 1 on a aussi, étant $u_1(t)$ et $u_2(t)$ bornées dans E,

$$\int_0^1\int_a^b|\sigma_1(t-n\,,x)|\,dt\,dx\le c \tag{5,17}$$

$$\int_0^1\int_a^b|\sigma_2(t-n\,,x)|\,dt\,dx\le c\,. \tag{5,18}$$

De (5,16) (5,17) (5,18) on a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1\int_a^b(\sigma_1(t-n\,,x)-\sigma_2(t-n\,,x))\,w(t-n\,,x)\,dt\,dx\right|=0\,.$$

On alors

$$\lim_{n\to\infty}[(w'(1-n)\,,w(1-n))_{\mathfrak{L}^2}-(w'(-n)\,,w(-n))_{\mathfrak{L}^2}]=-N^2\,.$$

Donc pour $n \leq \bar{n}$

$$-(w'(1-n), w(1-n))_{\mathcal{L}^2} + (w'(-n), w(-n))_{\mathcal{L}^2} \geq \frac{N^2}{2}$$

dont

$$-(w'(1-n), w(1-n))_{\mathcal{L}^2} + (w'(-n-m), w(-n-m))_{\mathcal{L}^2} \geq m \frac{N^2}{2}.$$

Étant $w(t)$ bornée dans E, on a alors $N = 0$, dont $u_1(t) = u_2(t)$.

La thèse est ainsi démontrée.

Le Corollaire 1 est une consequence immédiate du Théorème 2.

Le Corollaire 2 peut être demontré par une technique standard en utilisant, pour les passages à la limite, des méthodes semblables à ceux utilisés dans la partie, concernante l'unicité, de la démonstration du Théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMERIO L. et PROUSE G., *Almost periodic functions and functional analysis*, Van Nostrand 1971.

[2] AMERIO L. et PROUSE G., *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity*, I, II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *44* (1968).

[3] BRÉZIS H., Thèse, Paris 1970.

[4] PRODI G., *Soluzioni periodiche della equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, « Rend. Sem. Mat. Padova », *36* (1966).

[5] PROUSE G., *Soluzioni quasi periodiche della equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, I, II, III, IV, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *38–39* (1965).