Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Solutions bornées ou presque périodiques de l'équation non linéaire de la corde vibrante. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 9–14.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_9_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Matematica. — *Solutions bornées ou presque périodiques de l'équation non linéaire de la corde vibrante.* Nota II [(*)] di MARCO BIROLI [(**)], presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si provano due lemmi che verranno utilizzati nella dimostrazione del Teorema 2.

§ 4. DEUX LEMMES

Soit $f(t)$ $S^{\rho'}$–bornée dans $\mathfrak{L}^{\rho'}(a\,,b)$ sur $\mathbf{R}_+$ et $S^{\rho'}$ uniformement continue dans $\mathfrak{L}^{\rho'}(a\,,b)$ sur $\mathbf{R}_+$; considérons le problème

$$(4,1)\qquad \begin{aligned} & u''(t) + Au(t) + \sigma(t) = f(t) \qquad \text{p.p. sur } \mathbf{R}_+ \text{ dans } H^{-1}(a\,,b) \\ & u(t\,,\cdot) \in E \qquad \text{p.p. sur } \mathbf{R}_+ \\ & u(0) = u_0 \qquad u'(0) = u_1 \\ & \sigma(t) \in \mathfrak{L}^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+ ; \mathfrak{L}^1(a\,,b)) \quad ; \quad \sigma(t\,,x) \in \beta\left(\frac{\partial}{\partial t} u(t\,,x)\right) \\ & \text{p.p. sur } \mathbf{R}_+ \times]a\,,b[. \end{aligned}$$

LEMME 2. *Le problème* (4,1) *a une unique solution* $u(t) \in c(\mathbf{R}_+ ; E)$ *et* $\| u(t) \|_E \leq c$, *où* c *est une constante qui depende uniquement de*

$$\operatorname{Sup} \int_t^{t+1} \| f(t) \|^{\rho'}_{\mathfrak{L}^{\rho'}} \, dt\,, u_0\,, u_1\,.$$

De (4,1) on a

$$(4,2)\qquad \| u(\bar{t}+1) \|_E^2 - \| u(\bar{t}) \|_E^2 \leq$$

$$\leq 2 \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+1} \int_a^b \left(f(t\,,x) \frac{\partial}{\partial t} u(t\,,x) - \sigma(t\,,x) \frac{\partial}{\partial t} u(t\,,x) \right) dt\, dx\,.$$

Si le deuxième membre est non positif on a

$$(4,3)\qquad \| u(\bar{t}+1) \|_E \leq \| u(\bar{t}) \|_E\,.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1972.

(**) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

Si le deuxième membre est positif on a

$$
(4,4) \qquad \begin{aligned}
&\int_{\bar t}^{\bar t+1} \sigma(t, x) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \leq \int_{\bar t}^{\bar t+1} f(t, x) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \\
&\int_{\bar t}^{\bar t+1} \| u'(t) \|_{\mathfrak{L}^\rho}^{\rho}\, \mathrm{d}t \leq c_1
\end{aligned}
$$

où c_1 est une constante qui depende uniquement de $\operatorname{Sup} \int_{t}^{t+1} \| f(t) \|_{\mathfrak{L}^{\rho'}}^{\rho'}\, \mathrm{d}t$.

Étant $\rho \geq 2$, on a aussi

$$
\left(\int_{\bar t}^{\bar t+1} \| u'(t) \|_{\mathfrak{L}^2}^{2}\, \mathrm{d}t \right)^{1/2} \leq c_2 .
$$

Il y a alors deux points t_1, t_2 avec $t_1 < t_2$, $t_1 \in \left| \bar t , \bar t + \frac{1}{4} \right|$, $t_2 \in \left[\bar t + \frac{3}{4} , \bar t + 1 \right|$ tels que

$$
\| u'(t_1) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq 4\, c_2 \qquad \| u'(t_2) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq 4\, c_2 .
$$

On a aussi pour $t \in [\bar t , \bar t + 1]$

$$
\| u(t) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq \| u(\bar t) \|_{\mathfrak{L}^2} + \int_{\bar t}^{t} \| u'(\eta) \|_{\mathfrak{L}^2}\, \mathrm{d}\eta \leq \| u(\bar t) \|_{\mathfrak{L}^2} + c_2 .
$$

De (4,1) on a aussi

$$
(4,5) \qquad \begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \| u(t) \|_{\mathrm{H}_0^1}^{2}\, \mathrm{d}t \leq &- (u'(t_1), u(t_1))_{\mathfrak{L}^2} + (u'(t_2), u(t_2))_{\mathfrak{L}^2} + \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{a}^{b} \sigma(t, x)\, u(t, x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x .
\end{aligned}
$$

On a

$$
(4,6) \qquad \begin{aligned}
&(u'(t_1), u(t_1))_{\mathfrak{L}^2} \leq \| u'(t_1) \|_{\mathfrak{L}^2} \| u(t_1) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq \\
&\leq 4\, c_2 (\| u(\bar t) \|_{\mathfrak{L}^2} + c_2) \leq c_3 \| u(\bar t) \|_{\mathfrak{L}^2} + c_4 .
\end{aligned}
$$

Analoguement on a

$$
(4,7) \qquad (u'(t_2), u(t_2))_{\mathfrak{L}^2} \leq c_3 \| u(\bar t) \|_{\mathfrak{L}^2} + c_4 .
$$

On a aussi de (4,2) et (4,4)

$$
\int_{\bar t}^{\bar t+1} \int_{a}^{b} \sigma(t, x) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \leq c_5
$$

dont pour le Lemme 1.

$$\int_t^{t+1}\int_a^b |\sigma(t,x)|\,dt\,dx \le c_6 .$$

On a alors.

(4,8)
$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \sigma(t,x)\,u(t,x)\,dt\,dx \le c_6\left(\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|^2_{H^1_0}\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+ c_6\left(\int_{t_1}^{t_2}\|u'(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2}\,dt\right)^{1/2} \le c_6\left(\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|^2_{H^1_0}\,dt\right)^{1/2} + c_7 .$$

De (4,5), (4,6), (4,7) et (4,8) on a alors

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|^2_{H^1_0}\,dt \le 2\,c_3\,\|u(\bar t)\|_{\mathfrak{L}^2} + c_6\left(\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|^2_{H^1_0}\,dt\right)^{1/2} + c_8$$

dont

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|^2_{H^1_0}\,dt \le c_9\,\|u(\bar t)\|_{\mathfrak{L}^2} + c_{10} ,$$

donc

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|^2_{E}\,dt \le c_9\,\|u(\bar t)\|_{\mathfrak{L}^2} + c_{11} .$$

Il y alors $t^* \in [t_1, t_2]$ tel que

(4,9)
$$\|u(t^*)\|^2_E \le 2\,c_9\,\|u(\bar t)\|_{\mathfrak{L}^2} + 2\,c_{11} .$$

De (4,1) on a alors

$$\|u(\bar t + 1)\|^2_E \le \|u(t^*)\|^2_E + 2\int_{t^*}^{\bar t+1}\int_a^b (f(t,x) - \sigma(t,x))\,\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\,dt\,dx .$$

Donc de (4,4) et (4,9)

$$\|u(\bar t + 1)\|^2_E \le 2\,c_9\,\|u(\bar t)\|_{\mathfrak{L}^2} + c_{12} \le$$

$$\le 2\,c_9\,\|u(\bar t)\|_E + c_{12} \le 2\,c_9\,\|u(\bar t + 1)\|_E + c_{12}$$

dont

$$\|u(\bar t + 1)\|_E \le c_{13} .$$

On peut alors affirmer que $\forall \bar t \in \mathbf{R}_+$

$$\|u(\bar t + 1)\|_E \le \max.\,(\|u(\bar t)\|_E , c_{13})$$

dont, [5], on a

$$\| u(t) \|_{\mathrm{E}} \leq \max \left(\max_{[0,1]} \| u(t) \|_{\mathrm{E}} , c_{13} \right). \tag{4,10}$$

La thèse est ainsi démontrée.

LEMME 3. *Supposons* $u_0 = u_1 = 0$; *la solution* $u(t)$ *du problème* (4,1) *est uniformement continue sur* $\mathbf{R}_+$ *dans* E *et on a*

$$\| u(t+\delta) - u(t) \|_{\mathrm{E}} \leq \varphi(\delta)$$

où

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi(\delta) = 0$$

et $\varphi(\delta)$ *depende uniquement de*

$$\operatorname{Sup} \int_t^{t+1} \| f(\eta) \|_{\mathcal{L}^{\rho'}}^{\rho'} \, d\eta$$

et de

$$\operatorname{Sup} \int_t^{t+1} \| f(\eta + \delta) - f(\eta) \|_{\mathcal{L}^{\rho'}}^{\rho'} \, d\eta \, .$$

Observons que, étant du Lemme 2

$$\| u'(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq \| u(t) \|_{\mathrm{E}} \leq c_{14} ,$$

$u(t)$ est bornée dans H_0^1 et

$$\| u(t+\delta) - u(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq c_{14} \cdot \delta^{1/2} = \varphi_1(\delta) .$$

On peut alors affirmer que

$$\| u(t+\delta) - u(t) \|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \varphi_2(\delta) \tag{4,11}$$

où $\varphi_2(\delta)$ depende uniquement de $\varphi_1(\delta)$ et c_{14}.

Posons maintenant $w_\delta(t) = u(t+\delta) - u(t)$; de (4,1) on a

$$\| w_\delta(\bar{t} + 1) \|_{\mathrm{E}}^2 - \| w_\delta(t) \|_{\mathrm{E}}^2 \leq$$

$$\leq 2 \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+1} \int_a^b \left(f_\delta(t, x) \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(t, x) - (\sigma(t + \delta, x) - \sigma(t, x)) \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(t, x) \right) dt \, dx$$

où $f_\delta(t, x) = f(t + \delta, x) - f(t, x)$; donc

$$\| w_\delta(\bar{t} + 1) \|_{\mathrm{E}}^2 - \| w_\delta(t) \|_{\mathrm{E}}^2 \leq \tag{4,12}$$

$$\leq 2 \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+1} \int_a^b \left(f_\delta(t, x) \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(t, x) - \alpha \left| \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(t, x) \right|^\rho \right) dt \, dx .$$

Si le deuxième membre est non positif

$$\|w_\delta(\bar{t}+1)\|_E \leq \|w_\delta(t)\|_E . \tag{4,13}$$

Si le deuxième membre est positif on a

$$\left(\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+1} \|w'_\delta(t)\|^\rho_{\mathcal{L}^\rho}\, dt\right)^{1/\rho} \leq \frac{1}{\alpha}\left(\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+1} \|f_\delta(t)\|^{\rho'}_{\mathcal{L}^{\rho'}}\, dt\right)^{1/(\rho-1)} \leq \frac{1}{\alpha}\,\varphi_3(\delta) .$$

Il y a alors deux points $t_1 \in [\bar{t}\,,\,\bar{t}+1/4]$, $t_2 \in [\bar{t}+3/4\,,\,\bar{t}+1]$ tels que

$$\|w'_\delta(t_1)\|_{\mathcal{L}^2} \leq c_{15} \qquad \|w'_\delta(t_2)\|_{\mathcal{L}^2} \leq c_{16} .$$

Par le même procedé du Lemme 2 on a alors

$$\|w_\delta(t)\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|w_\delta(\bar{t})\|_{\mathcal{L}^2} + c_{17}$$

$\forall t \in [\bar{t}\,,\,\bar{t}+1]$.

De (4,1) on a aussi

$$\int_{t_1}^{t_2} \|w_\delta(t)\|^2_{H^1_0}\, dt \leq -(w'_\delta(t_1)\,,\,w_\delta(t_1))_{\mathcal{L}^2} + (w'_\delta(t_2)\,,\,w_\delta(t_2))_{\mathcal{L}^2} + \tag{4,14}$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (\sigma(t+\delta\,,\,x) - \sigma(t\,,\,x))\, w_\delta(t\,,\,x)\, dt\, dx +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_\delta(t\,,\,x)\, w_\delta\,(t\,,\,x)\, dt\, dx .$$

On a

$$|(w'_\delta(t_1)\,,\,w_\delta(t_1))_{\mathcal{L}^2}| \leq c_{16}\,\varphi_1(\delta) \tag{4,15}$$

$$|(w'_\delta(t_2)\,,\,w_\delta(t_2))_{\mathcal{L}^2}| \leq c_{16}\,\varphi_1(\delta) \tag{4,16}$$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_\delta(t\,,\,x)\, w_\delta(t\,,\,x)\, dt\, dx\right| \leq \varphi_2(\delta)\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b |f_\delta(t\,,\,x)|\, dt\, dx \leq \tag{4,17}$$

$$\leq \varphi_2(\delta)\left(\operatorname{Sup}\left(\int_t^{t+1} \|f(t)\|^{\rho'}_{\mathcal{L}^{\rho'}}\, dt\right)^{1/\rho'}\right) 2\,\delta^{1/\rho'} .$$

De (4,10) on a aussi

$$\int_t^{t+1}\int_a^b \sigma(t\,,\,x)\,\frac{\partial}{\partial t}\, u(t\,,\,x)\, dt\, dx \leq c_{18}$$

dont pour le Lemme 1 on a

$$\int_t^{t+1}\int_a^b |\sigma(t,x)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \leq c_{19}\,.$$

On a alors

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (\sigma(t+\delta,x)-\sigma(t,x))\,w_\delta(t,x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right| \leq 2\,c_{19}\,\varphi_2(\delta)\,. \tag{4,18}$$

De (4,15), (4,16), (4,17) et (4,18) on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \|w_\delta(t)\|^2_{\mathrm{H}_0^1}\,\mathrm{d}t \leq c_{20}\,\varphi_1(\delta) + c_{21}\,\varphi_2(\delta)\,. \tag{4,19}$$

De (4,19) par les mêmes méthodes du Lemme 2, on démontre la thèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMERIO L. et PROUSE G., *Almost periodic functions and functional analysis*, Van Nostrand 1971.

[2] AMERIO L. et PROUSE G., *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity*, I, II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *44* (1968).

[3] BRÉZIS H., *Thèse*, Paris 1970.

[4] PRODI G., *Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, « Rend. Sem. Mat. Padova », *36* (1966).

[5] PROUSE G., *Soluzioni quasi periodiche della equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, I, II, III, IV, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *38–39* (1965).