Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

George Vranceanu

Sopra le curve chiuse sghembe

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 82–86.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_82_0>

Geometria differenziale. — *Sopra le curve chiuse sghembe.* Nota di GEORGE VRANCEANU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Some properties of closed twisted curves are studied by using a spherical surface associated to them, according to a general procedure given by the Author in a recent paper [1]. Thus we obtain that an integer l can be associated to any closed twisted curve C and surface S containing C.

In una Nota [1] recente ho mostrato come si possa associare ad una varietà differenziabile chiusa V_n immersa nello spazio euclideo E_N $(N > n+1)$ una varietà sferica S_{N-1}. Vogliamo ora dare alcune proprietà globali di siffatte immersioni nel caso di una curva chiusa sghemba, lo studio di tali curve avendo ricevuto nuovi impulsi da recenti lavori di Beniamino Segre [2, ed altre ricerche dello stesso Segre ivi citate].

1. Supponiamo dunque che V_n sia una curva chiusa sghemba orientata C dello spazio ordinario, che non passi per l'origine e che possiamo ammettere definita dalle formule

$$x = f(s) \quad , \quad y = \varphi(s) \quad , \quad z = \psi(s) \tag{1}$$

dove s sia l'arco della curva misurato nel verso positivo a partire da un punto comunque fissato su di essa. In questo caso la superficie sferica Σ associata è data dalle formule

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \cos\lambda + [\alpha' \cos\theta + \alpha'' \operatorname{sen}\theta] \operatorname{sen}\lambda \\ y_1 &= \beta \cos\lambda + [\beta' \cos\theta + \beta'' \operatorname{sen}\theta] \operatorname{sen}\lambda \\ z_1 &= \gamma \cos\lambda + [\gamma' \cos\theta + \gamma'' \operatorname{sen}\theta] \operatorname{sen}\lambda\,, \end{aligned} \tag{2}$$

dove $t(\alpha, \beta, \gamma)$, $n(\alpha', \beta', \gamma')$, $b(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ denota il triedro di Frenet di C e λ è l'angolo che il vettore di posizione $r(x, y, z)$ fa col vettore t. Si ha dunque

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = r\cos\lambda \quad , \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad r \neq 0; \tag{3}$$

θ è un parametro che varia da 0 a 2π e costituisce insieme ad s una coppia di parametri sulla superficie Σ.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1972.

Ne risulta che C appartiene a Σ solamente se $r = 1$; perciò conviene associare a C la superficie chiusa S definita dalle formule

$$
\begin{aligned}
X &= r\,[\alpha \cos\lambda + (\alpha' \cos\theta + \alpha'' \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\lambda] \\
Y &= r\,[\beta \cos\lambda + (\beta' \cos\theta + \beta'' \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\lambda] \\
Z &= r\,[\gamma \cos\lambda + (\gamma' \cos\theta + \gamma'' \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\lambda]\,,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

con che C appartiene ad S per $\theta = \sigma$, dove σ soddisfi le equazioni

$$
\begin{aligned}
x\alpha' + y\beta' + z\gamma' &= r \cos\sigma \operatorname{sen}\lambda \\
x\alpha'' + y\beta'' + z\gamma'' &= r \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\lambda\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ne discende che σ è determinata dall'equazione

$$
\operatorname{tg}\sigma = \frac{x\alpha'' + y\beta'' + z\gamma''}{x\alpha' + y\beta' + z\gamma'}\,,
\tag{6}
$$

salvo il caso in cui si abbia

$$
x\alpha' + y\beta' + z\gamma' = 0 \quad , \quad x\alpha'' + y\beta'' + z\gamma'' = 0\,,
\tag{6'}
$$

ossia salvo il caso in cui il vettore di posizione sia parallelo alla tangente onde $\sin\lambda = 0$.

Possiamo evitare questa situazione supponendo che l'origine $\theta\,(0\,,0\,,0)$ non è situata sulla sviluppabile delle tangenti t.

La curva C essendo situata su S, possiamo considerare la curvatura geodetica K_g di C, data dalla formula ben nota

$$
K_g = \frac{1}{R}
\begin{vmatrix}
x_1 & y_1 & z_1 \\
\alpha & \beta & \gamma \\
\alpha' & \beta' & \gamma'
\end{vmatrix}
\tag{7}
$$

dove R è il raggio di curvatura di C e dove $x_1\,, y_1\,, z_1$ sono i coseni della normale alla superficie S lungo C, dunque dati dalle formule (2) per $\theta = \sigma$. Ne risulta la formula

$$
K_g\, ds = \frac{\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\lambda}{R}\, ds\,,
\tag{8}
$$

cosicché integrando si ottiene

$$
\Delta\psi = -\int_C K_g\, ds = -\int_C \frac{\operatorname{sen}\sigma\ \operatorname{sen}\lambda}{R}\, ds
\tag{9}
$$

$\Delta\psi$ essendo l'invariante di Levi-Civita [3] che ci dà la variazione dell'angolo di un vettore V trasportato per parallelismo lungo C.

Naturalmente tale invariante è nullo se C è una geodetica di S perché in tale caso si ha $K_g = 0$.

2. D'altra parte, data una superficie S chiusa avente come metrica

$$ds^2 = e^{2f}\,[du^2 + dv^2] \tag{10}$$

e una curva C chiusa su S data dalle formule

$$u = u(t) \quad , \quad v = v(t) \tag{11}$$

dove u, v sono funzioni periodiche di t, si può mostrare che si ha la formula

$$K_g\, ds = \frac{\ddot{u}\dot{v} - \dot{u}\ddot{v}}{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}\, dt + f_v\, du - f_u\, dv \qquad \left(\dot{u} = \frac{du}{dt}\right). \tag{12}$$

Integrando si ottiene

$$\int_C K_g\, ds = \left(\operatorname{arctg}\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)_0^{2\pi} + \int_C (f_v\, du - f_u\, dv)\,. \tag{13}$$

Ora il primo termine del secondo membro è uguale a $2\pi l$ dove l è un intiero, che dipende dai punti in cui si ha $\dot{v} = 0$, $\dot{u} \neq 0$. Supponiamo adesso che la curva C chiuda su S una regione D. Allora per il secondo membro sussiste la formula

$$\int_C (f_v\, du - f_u\, dv) = \iint_D (f_{uu} + f_{vv})\, du\, dv = -\iint_D K\, d\rho$$

dove $d\rho$ è l'elemento d'aria, K la curvatura di Gauss di S e D, l'aria lasciata da C a sinistra. Percio risulta la formula

$$\int_C K_g\, ds + \iint_D K\, d\rho = 2\pi l\,. \tag{14}$$

Se la superficie S è chiusa, cambiando il senso di percorso di C si ha altresì la formula

$$-\int_C K_g\, ds + \iint_{D'} K\, d\rho = 2\pi l' \qquad (D + D' = S) \tag{14'}$$

dove l' dipende dal numero dei punti in cui $\dot{u} = 0$, $\dot{v} \neq 0$. Ora dalla formula di Gauss–Bonnet ne risulta

$$l + l' = 2(1 - p)\,. \tag{15}$$

Se S è una sfera di raggio 1, dunque $K = 1$, e C un grande circolo allora il primo integrale (14) è nullo e il secondo è 2π, dunque $l = l' = 1$. Ne risulta il teorema di Levi–Civita, che le curve per cui $\Delta\psi = 0$ dividono la sfera in due parti d'egual aria. Se S è un toro si ha $l = l' = 0$ se la curva ha l'invariante $\Delta\psi = 0$ e le formule (14) et (14') hanno tutti i termini nulli.

In generale se la curva a $\Delta\psi = 0$ e se $l = l'$ allora abbiamo

$$\iint_D K\, d\rho = \iint_{D'} K\, d\rho = 2(1 - p)\pi \tag{15'}$$

quello che estende il teorema di Levi–Civita utilizzando come aria quella di Gauss.

Se S è la superficie (4) associata ad (1) si mostra che si ha $l = 0$ per la curva (1), ma esistono curve su (4) per cui l è un intiero qualunque.

3. Si ottengono formule semplici se supponiamo che la curva C sia sferica, dunque che si abbia

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad , \quad x\alpha + y\beta + z\gamma = 0 . \tag{16}$$

In tal caso la superficie Σ associata è data dalle formule [4]

$$\begin{aligned} X &= \alpha' \cos\theta + \alpha'' \operatorname{sen}\theta \\ Y &= \beta' \cos\theta + \beta'' \operatorname{sen}\theta \\ Z &= \gamma' \cos\theta + \gamma'' \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{17}$$

e le equazioni (5) si scrivono

$$x\alpha' + y\beta' + z\gamma' = \cos\sigma \quad , \quad x\alpha'' + y\beta'' + z\gamma'' = \operatorname{sen}\sigma . \tag{18}$$

Derivando due volte l'ultima formula (13), si ottengono le condizioni

$$\cos\sigma = -R \quad , \quad \operatorname{sen}\sigma = T\frac{dR}{ds} .$$

Dunque si ha

$$K_g\, ds = T\frac{dR}{R}$$

e la (8) si scrive

$$\Delta\psi = -\int_C \frac{T\, dR}{R} . \tag{19}$$

Consideriamo ora come esempio, la curva sghemba sferica

$$x = \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \quad , \quad y = \cos^2\varphi \quad , \quad z = \operatorname{sen}\varphi . \tag{20}$$

Questa ha un punto doppio P (0, 1, 0), che si ottiene per i valori $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ del parametro. La curva è simile ad un otto sghembo e nel punto doppio le tangenti risultano perpendicolari.

Si trova facilmente che si ha

$$\frac{T\, dR}{R} = \frac{\operatorname{sen}\varphi\,[2 + \cos^2\varphi]}{1 + \cos^2\varphi}\, d\varphi = -d\cos\varphi - d\operatorname{arctg}\cos\varphi ,$$

e quindi

$$\Delta\psi = -\int_0^{\pi} \frac{T\,dR}{R} = 2 + \frac{\pi}{2}\,. \tag{21}$$

Dunque l'invariante di parallelismo $\Delta\psi$ lungo il primo cappio non è nullo, ma esso è nullo lungo l'insieme dei due cappî.

Supponiamo ora che la curva sia piana, situata nel piano $z = c$, dove c è una costante. In questo caso risulta

$$\gamma = \gamma' = \alpha'' = \beta'' = 0 \quad , \quad \gamma'' = 1$$

e l'ultima formula (2) ci dà

$$c = r \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \lambda \quad , \quad r^2 = x^2 + y^2 + c^2. \tag{21'}$$

Se la curva è anche sferica, onde C è un cerchio

$$x = \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad y = \cos\alpha\cos\varphi \quad , \quad z = \operatorname{sen}\alpha$$

dove α è un angolo costante, si ha

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \sigma = \alpha \quad , \quad R = \cos\alpha \quad , \quad ds = \cos\alpha\, d\varphi$$

e la (8) si scrive

$$\Delta\psi = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\alpha\, d\varphi = -2\pi \operatorname{sen}\alpha\,; \tag{22}$$

questa formula ci dice che l'invariante di Levi-Civita varia col piano, dunque coll'angolo α.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. VRANCEANU, *Variétés sphériques associées aux variétés différentiables fermées*, « C.R. Ac. Sc. Paris », *272*, 1635–1637 (1971).

[2] BENIAMINO SEGRE, *Alcune proprietà differenziali in grande delle curve chiuse sghembe*, « Rend. di Mat. », *1* (1968).

[3] T. LEVI-CIVITA, *Curve chiuse e parallelismo monodromo sopra la sfera*, « Acta Pont. Novi Lyncaei », *87* (1933–34).

[4] G. VRANCEANU, *Sur les variétés sphériques associées au variétés différentiables fermées*. Communications Académie Flamande, Bruxelles, 1971.