
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIA TALLINI SCAFATI

Calotte di tipo (m, n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 53 (1972), n.1-2, p. 71-81.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_71_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Calotte di tipo (m, n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$* ^(*).Nota^(**) di MARIA TALLINI SCAFATI, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — This paper deals with the study of $\{k, n\}$ -caps of a Galois space $S_{r,q}$ ($r \geq 3, q > 2$), that is of the sets of k points of $S_{r,q}$ for which the maximum number of collinear points is n . Boundaries for k ensuring that $\{k, n\}$ -caps exist are given. Then we get a deeper insight of $\{k, n\}$ -caps of the type (m, n) , that is, $\{k, n\}$ -caps having only m -secant and n -secant lines. We prove in fact that, if such a cap exists and does not coincide with a hyperplane or with the complementary set of a hyperplane in $S_{r,q}$, then q must be an odd square and m, n, k are necessarily given by (54), (55), (62) respectively.

1. — In uno spazio lineare $S_{r,q}$ ($q = p^h$) definiamo secondo l'uso (ved. B. Segre [3]) $\{k, n\}$ -calotta un insieme K di k punti, che sia un sottoinsieme proprio di $S_{r,q}$ e di cui n (≥ 2) denoti il massimo numero di punti allineati. Gli interi k ed n si diranno rispettivamente *ordine* e *grado* di K . Per evitare casi banali, supporremo sempre in seguito $q > 2$.

Una $\{k, n\}$ -calotta K si dirà *completa*, se non è contenuta in nessuna $\{k+1, n\}$ -calotta; in caso contrario si dirà *incompleta*. La calotta K si dirà *propria*, o *impropria*, a seconda che i suoi punti siano, o meno, congiunti dallo spazio ambiente. Per $r = 2$, la nozione di $\{k, n\}$ -calotta coincide con quella di $\{k, n\}$ -arco (cfr. [1], [4], [5]). Nel seguito supporremo $r \geq 3$.

Data una $\{k, n\}$ -calotta K , denoteremo con t_s ($s = 0, 1, \dots, n$) il numero delle s -secanti di K , cioè delle rette che incontrano K esattamente in s punti distinti. Gli interi t_s saranno detti *caratteri* della calotta. La calotta K si dirà *ad l caratteri*, se per essa sono diversi da zero esattamente l distinti dei caratteri t_s (si noti che deve essere $t_n \neq 0$). Essa si dirà di tipo $(m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, n)$, con $m_1 < m_2 < \dots < m_{l-1} < n$, se i suoi caratteri diversi da zero sono soltanto $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_{l-1}}, t_n$. Chiameremo *specie* della calotta K il più piccolo intero $m = m_1$, per cui si abbia $t_m \neq 0$.

Nel presente Lavoro ci occupiamo dello studio delle $\{k, n\}$ -calotte in generale, per poi fissare l'attenzione sulle calotte a due caratteri. Relativamente a queste ultime determineremo completamente i valori di q, m, n e k affinché esistano $\{k, n\}$ -calotte di tipo (m, n) in $S_{r,q}$, secondo quanto espresso dalle Proposizioni IX, X, XI, XIII, XIV.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1972.

2. - Proviamo la seguente proposizione:

I) - *Data in $S_{r,q}$ una $\{k, n\}$ -calotta K , per i suoi caratteri t_s ($s = 0, 1, \dots, n$) sussistono le seguenti relazioni:*

$$(1) \quad \sum_{s=0}^n t_s = (Q_r Q_{r-1})/Q_1,$$

$$(2) \quad \sum_{s=1}^n s t_s = k Q_{r-1},$$

$$(3) \quad \sum_{s=2}^n s(s-1) t_s = k(k-1),$$

ove si è posto:

$$(4) \quad Q_h = q^h + q^{h-1} + \dots + q + 1.$$

Dimostrazione. La (1) segue subito osservando che le rette di $S_{r,q}$ sono in numero di:

$$\binom{Q_r}{2} / \binom{Q_1}{2} = (Q_r Q_{r-1})/Q_1.$$

La (2) si prova computando il numero delle coppie ciascuna costituita da un punto di K e da una retta per esso: una prima volta osservando che una s -secante di K individua s coppie siffatte (secanti distinte dando luogo a coppie distinte), onde complessivamente il loro numero è dato dal primo membro della (2); una seconda volta tenendo presente che ognuno dei k punti di K individua Q_{r-1} coppie suddette (punti distinti individuando coppie distinte), onde il loro numero complessivo è dato dal secondo membro della (2).

La (3) si ottiene computando il numero delle coppie ciascuna costituita da una coppia di punti di K e dalla retta per essi: in un primo modo notando che una s -secante di K individua $\binom{s}{2}$ coppie siffatte (secanti distinte dando luogo a coppie distinte); in un secondo modo osservando che il numero cercato coincide col numero delle coppie di punti di K , ossia $\binom{k}{2}$.

Sussiste la seguente proposizione di immediata verifica:

II) - *Un S_h ($h \geq 2$) di $S_{r,q}$ che abbia almeno due punti in comune con la $\{k, n\}$ -calotta K , la interseca in una $\{k', n'\}$ -calotta K' , con $k' \leq k$, $n' \leq n$, ad l' caratteri, con $l' \leq l$ e di specie $m' \geq m$. Inoltre si ha $t'_s \leq t_s$ ($s = 0, 1, \dots, n$).*

Si ha che:

III) - *Per la specie m di una $\{k, n\}$ -calotta K di $S_{r,q}$ risulta:*

$$(5) \quad m \leq n - 2.$$

Dimostrazione. Sia π un piano passante per una n -secante di K . Esso interseca K (cfr. Proposizione II) in un $\{k', n'\}$ -arco di specie $m' \geq m$. Per la Proposizione II di [5], risulta $m' \leq n - 2$, onde l'asserto.

Proviamo che:

IV) - Per una $\{k, n\}$ -calotta K , per la quale sia μ il più piccolo intero positivo tale che K possieda rette μ -secanti, si ha:

$$(6) \quad k \leq (n-1)qQ_{r-2} + \mu.$$

Dimostrazione. Se $P \in K$ è un punto di una μ -secante, le $Q_{r-1} - 1 = qQ_{r-2}$ rette distinte da essa passanti per P , hanno al più ciascuna $n-1$ punti in comune con K , distinti da P . Ne segue la (6).

Si ha infine che:

V) - Data una $\{k, n\}$ -calotta K in $S_{r,q}$ di tipo $(m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, n)$, l'insieme complementare $S_{r,q} - K$ risulta una $\{k', n'\}$ -calotta, K' , di tipo $(m'_1, m'_2, \dots, m'_{l-1}, n')$, ove è:

$$(7) \quad k' = Q_r - k, \quad n' = q + 1 - m_1, \quad m'_1 = q + 1 - n, \\ m'_s = q + 1 - m_{l-s+1} \quad \text{per } s = 2, \dots, l-1.$$

K' verrà detta la calotta complementare di K .

3. - Sia K una $\{k, n\}$ -calotta ($n \leq q$) completa di specie m di $S_{r,q}$. In questo numero ci proponiamo di determinare una limitazione inferiore per k .

Le coppie (P, s) costituite da un punto P esterno a K e da una n -secante, s , per P sono in numero di $N = (q + 1 - n)t_n$. Poiché K è completa, da ogni punto P esterno a K passa almeno una n -secante s di K e quindi P individua almeno una coppia (P, s) , ond'è:

$$(8) \quad N = (q + 1 - n)t_n \geq Q_r - k,$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, per ogni punto P esterno a K passa una sola n -secante di K . Supponiamo dapprima $m \geq 1$. Risulta (per $s = m, \dots, n-1$) $st_s \geq mt_s$ e quindi:

$$(9) \quad \sum_{s=m}^{n-1} st_s \geq m \sum_{s=m}^{n-1} t_s,$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, $t_s = 0$, per $s = m+1, \dots, n-1$, cioè se, e soltanto se, K è di tipo (m, n) . Dalle (1), (2) e dalla (9) si ha:

$$(10) \quad kQ_{r-1} \geq m(Q_r Q_{r-1})/Q_1 + t_n(n-m),$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, K è di tipo (m, n) . Dalla (10), tenuto conto della (8), si ha infine:

$$(11) \quad k \geq \frac{mQ_{r-1}(Q_1 - n) + Q_1(n-m)}{Q_1(Q_{r-1}Q_1 - nQ_{r-1} + n-m)} Q_r,$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, esso vale contemporaneamente nella (8) e nella (9), cioè se, e soltanto se, la calotta è di tipo (m, n)

e per ogni punto esterno a K passa una sola n -secante. Nel n. 4 proveremo che non esistono calotte siffatte, dunque nella (11) non può valere il segno d'uguaglianza.

Supponiamo ora $m = 0$. Si ha:

$$\sum_{s=1}^{n-1} st_s \geq \sum_{s=1}^{n-1} t_s = (Q_r Q_{r-1})/Q_1 - t_0 - t_n,$$

in forza della (1); il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, K è di tipo $(0, 1, n)$ oppure $(0, n)$. Dalla (2) e dalla precedente disuguaglianza si ha:

$$(12) \quad kQ_{r-1} \geq (Q_r Q_{r-1})/Q_1 - t_0 + t_n (n-1),$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, K è di tipo $(0, 1, n)$ ovvero $(0, n)$. D'altra parte, per la (1) si ha:

$$(13) \quad (Q_r Q_{r-1})/Q_1 - t_0 = \sum_{s=1}^n t_s \geq t_n,$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, K è di tipo $(0, n)$. Dalle (12) e (13) si ha:

$$(14) \quad kQ_{r-1} \geq nt_n,$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, esso vale nelle (12) e (13), cioè se, e soltanto se, K è di tipo $(0, n)$. In virtù della (8) e della (14) si può dunque scrivere:

$$(15) \quad k \geq \frac{nQ_r}{Q_{r-1}Q_1 - nQ_{r-1} + n},$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, K è di tipo $(0, n)$ e da ogni punto P esterno a K esce una sola n -secante; ciò è manifestamente assurdo (perchè allora K si ridurrebbe ad una n -pla di punti allineati), onde nella (15) non può valere il segno d'uguaglianza. Notiamo che la (11), per $m = 0$, fornisce la (15). Possiamo pertanto concludere con la seguente proposizione:

VI) - Per una $\{k, n\}$ -calotta completa di $S_{r,q}$ di specie $m \geq 0$, si ha:

$$(16) \quad k > \frac{mQ_{r-1}(Q_1 - n) + Q_1(n - m)}{Q_1(Q_{r-1}Q_1 - nQ_{r-1} + n - m)} Q_r.$$

Osserviamo che la (15) si stabilisce indipendentemente dalla condizione $m = 0$; tuttavia per $m \neq 0$ la (11) è più espressiva della (15), essendo il secondo membro della (11) minore del secondo membro della (15).

Fissati r, q, n , sia $M_{r,q,n}$ il massimo di k , per cui esista una $\{k, n\}$ -calotta propria. La determinazione di tale intero $M_{r,q,n}$ è della massima importanza per lo studio delle calotte di $S_{r,q}$. Evidentemente una $\{M_{r,q,n}, n\}$ -calotta è completa. Deve dunque aversi, per la (16) e la (6):

$$(16)_1 \quad Q_r \frac{mQ_{r-1}(Q_1 - n) + Q_1(n - m)}{Q_1(Q_{r-1}Q_1 - nQ_{r-1} + n - m)} < M_{r,q,n} \leq (n-1)Q_{r-2} + n.$$

Ne segue che è:

$$(16)_2 \quad m \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{M_{r,q,n}}{q^{r-1}} \leq n - 1.$$

4. - Occupiamoci ora delle $\{k, n\}$ -calotte proprie di $S_{r,q}$ a due caratteri, iniziando dai casi più semplici e cioè da quelle di tipi $(0, n)$, $(m, q+1)$, $(1, n)$, (m, q) .

La Proposizione VIII del n. 5, pag. 279 di [6], afferma che:

VII) - In $S_{r,q}$ non esistono calotte di tipo $(0, n)$, con $2 \leq n \leq q-1$.

Dalle Proposizioni VII e V segue subito che;

VIII) - In $S_{r,q}$ non esistono calotte di tipo $(m, q+1)$, con $2 \leq m \leq q-1$.

Evidentemente, una calotta di tipo $(1, q+1)$ risulta un iperpiano di $S_{r,q}$ (in quanto un sottoinsieme di $S_{r,q}$ che goda delle proprietà di contenere ogni retta che ha con esso a comune due punti è uno spazio subordinato e, se non possiede rette esterne, è un iperpiano). Per la Proposizione V, si ha allora che una calotta di tipo $(0, q)$ di $S_{r,q}$ è il complementare di un iperpiano. Osserviamo infine che non possono esistere calotte K di tipo $(0, q+1)$, perché, se P è un punto di una calotta siffatta e Q un punto esterno a K , la retta PQ dovrebbe appartenere a K , e ciò è assurdo, perché Q è esterno ad esso.

Quanto ora provato e le Proposizioni VII e VIII si possono riassumere nella proposizione seguente:

IX) - In $S_{r,q}$ una calotta di tipo $(0, n)$ può esistere soltanto se $n = q$, nel qual caso essa è il complementare di un iperpiano. Analogamente, non può esistere una calotta di tipo $(m, q+1)$, tranne nel caso in cui sia $m = 1$ ed allora essa risulta un iperpiano.

Consideriamo ora una calotta K propria di $S_{r,q}$, di tipo $(1, n)$, potendo supporre, per la Proposizione IX, $n \leq q$. Se k è il numero dei punti di K , la calotta risulta un insieme $k_{n,r,q}$, secondo le notazioni di [6], non contenente rette. Per $n = 2$, ovvero $n = q$, in forza delle Proposizioni V e VI del n. 4, pag. 277 di [6], siffatti insiemi non esistono (in quanto un insieme $k_{n,r,q}$ per $n = 2$ ovvero $n = q$ contiene sempre rette). Dunque possiamo supporre $3 \leq n \leq q-1$. Intersecando K con un S_3 , si ottiene un insieme $k'_{n,3,q}$, privo di rette e quindi non singolare (cfr. [6], n. 2). In forza della Proposizione XV, n. 6, pag. 283 di [6], si ha che, se è $q > 4$, un siffatto insieme $k'_{n,3,q}$ non può esistere (in quanto un insieme $k'_{n,3,q}$ per $q > 4$ contiene sempre delle rette). Essendo $3 \leq n \leq q-1$, rimane allora da esaminare la sola possibilità che esista una calotta K , di tipo $(1, n)$ in $S_{r,q}$, con $q = 4$, $n = 3$. Proveremo che siffatte calotte non esistono, in quanto, per $r = 3$, la loro esistenza conduce ad un assurdo. Infatti, dalle (1), (2), (3), per $r = 3$, $q = 4$, $n = 3$, si ottiene:

$$t_1 + t_3 = 17.21 \quad , \quad t_1 + 3t_3 = 21 \cdot k \quad , \quad 6t_3 = k(k-1).$$

Eliminando t_1 e t_3 , si giunge alla seguente equazione in k :

$$k^2 - 64k + 1071 = 0,$$

che non ammette radici intere, onde l'asserto.

Concludendo, si ha la seguente proposizione:

X) - In $S_{r,q}$ non esistono calotte di tipo $(1, n)$, qualunque sia $n (\leq q)$.

Dalle Proposizioni X e V si ha che:

XI) - In $S_{r,q}$ non esistono calotte di tipo (m, q) , qualunque sia $m (\geq 1)$.

In base ai risultati stabiliti in questo numero, nello studio delle calotte di tipo (m, n) possiamo senz'altro supporre:

$$(17) \quad 2 \leq m < n \leq q - 1.$$

5. - In questo numero esamineremo le calotte K di $S_{3,q}$ di tipo (m, n) con $2 \leq m \leq n \leq q - 1$. Utilizzeremo i seguenti risultati, stabiliti in [5], n. 7, relativi agli archi di tipo (m, n) di un $S_{2,q}$:

XII) - Se esiste un $\{k', n\}$ -arco di tipo (m, n) di $S_{2,q}$ ($2 \leq m \leq n \leq q - 1$), k' deve soddisfare l'equazione:

$$(18) \quad k'^2 - k' [1 + Q_1(n + m - 1)] + mnQ_2 = 0,$$

inoltre $n - m$ deve dividere $q (= p^h)$, cioè (dovendo essere $n - m \geq 2$, cfr. (5) di [5], n. 2):

$$(19) \quad n - m = p^l, \quad 1 \leq l \leq h - 1.$$

Un piano di $S_{3,q}$ interseca K (cfr. Proposizione II di [5]) in un $\{k', n\}$ -arco di tipo (m, n) , ove k' soddisfa alla (18). Proviamo che è assurdo supporre l'intero k' fisso al variare del piano in $S_{3,q}$. Infatti, se così fosse, considerando i punti di K distribuiti sui piani per una n -secante, si avrebbe $k = (k' - n)(q + 1) + n$, mentre, ragionando in modo analogo per una m -secante, si avrebbe $k = (k' - m)(q + 1) + m$. Uguagliando i due valori di k si trae $m = n$, il che non può essere.

Ne segue che l'equazione (18) ammette due radici intere positive distinte, k_1 e k_2 . Per fissare le idee, supporremo $k_1 > k_2$. Denotiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme dei piani di $S_{3,q}$ che intersecano K in un $\{k_1, n\}$ -arco; per quanto detto, esso non è vuoto e non coincide con la totalità dei piani dello spazio.

Sia r una fissata n -secante di K . Detto u il numero dei piani di $\mathcal{S}$ passanti per essa, si ha (considerando i punti di $K - r$ distribuiti sui piani passanti per r e osservando che i $q + 1 - u$ piani per r non appartenenti a $\mathcal{S}$ intersecano K in un $\{k_2, n\}$ -arco):

$$(20) \quad u = [k - k_2(q + 1) + nq] / (k_1 - k_2).$$

Analogamente, se s è una m -secante fissata di K , detto v il numero dei piani di $\mathfrak{S}$ passanti per essa, risulta:

$$(21) \quad v = [k - k_2(q + 1) + mq]/(k_1 - k_2).$$

Dalle (20) e (21) si deduce che u e v restano fissi al variare della n -secante r e della m -secante s ed inoltre che è $u > v$. Si ha allora che l'insieme $\mathfrak{S}$ di piani risulta una calotta di tipo (v, u) nello spazio duale di $S_{3,q}$. Precisamente le m -secanti di K , nello spazio duale, sono le v -secanti di $\mathfrak{S}$ e le n -secanti di K sono le u -secanti di $\mathfrak{S}$.

Proviamo anzitutto che non può essere $v = 0$: infatti, se così fosse, scelto un piano π_1 intersecante K in un $\{k_1, n\}$ -arco e denotata con s una m -secante di tale $\{k_1, n\}$ -arco e quindi di K , essendo $v = 0$, per s non dovrebbero passare piani di $\mathfrak{S}$, mentre π_1 è un piano di $\mathfrak{S}$. Analogamente proviamo che non può essere $u = q + 1$. Infatti, se così fosse, scelto un piano π_2 intersecante K in un $\{k_2, n\}$ -arco (certamente esistente, in quanto $\mathfrak{S}$ non esaurisce tutti i piani dello spazio) e denotata con r una n -secante di tale $\{k_2, n\}$ -arco e quindi di K , essendo $u = q + 1$, tutti i piani per r dovrebbero appartenere a $\mathfrak{S}$, mentre π_2 non appartiene a $\mathfrak{S}$. Per le Proposizioni X, XI del n. 4 e per quanto ora provato, si ha allora che i caratteri v, u di $\mathfrak{S}$ debbono soddisfare alle seguenti limitazioni:

$$(22) \quad 2 \leq v < u \leq q - 1.$$

In forza della Proposizione III del numero 2, si ha poi che:

$$(23) \quad u - v \geq 2.$$

Dalle (20) e (21) si trae:

$$(24) \quad u - v = \frac{(n-m)q}{k_1 - k_2}.$$

Poiché k_1 e k_2 sono le due radici della (18), risulta:

$$(25) \quad k_1 - k_2 = \sqrt{\Delta_2},$$

ove si è posto:

$$(26) \quad \Delta_2 = [1 + Q_1(n + m - 1)]^2 - 4nmQ_2,$$

ossia denotando con Δ_2 il discriminante della (18). Poiché $n - m$ soddisfa alla (19), dalle (24) e (25) si ha:

$$(27) \quad u - v = p^{h+l}/\sqrt{\Delta_2}.$$

Dunque, p essendo primo, dovrà essere:

$$(28) \quad \Delta_2 = p^{2t}, \quad 0 \leq t \leq h + l.$$

Risultando, per le (22) e (23), $2 \leq u - v < q$, in forza delle (27) e (28), si ha:

$$2 \leq p^{h+l-t} < p^h$$

e quindi $1 \leq h + l - t < h$, da cui:

$$(29) \quad l + 1 \leq t \leq h + l - 1.$$

Dalle (26) e (28), con facili calcoli si ha:

$$p^{2t} - (n - m)^2 = q [q (n + m - 1)^2 - 4 nm Q_1 + 2 (n + m) (n + m - 1)].$$

Tenuto conto della (19), la precedente relazione si scrive:

$$(30) \quad (p^{2(t-l)} - 1) p^{2t} = q [q (n + m - 1)^2 - 4 nm Q_1 + 2 (n + m) (n + m - 1)].$$

Per la (29) [risultando $2(t-l) \geq 2$], il primo membro della (30) è un intero *positivo*. Dalla (30) segue allora che è:

$$(31) \quad 2l \geq h,$$

(infatti, se fosse $2l < h$, dividendo a membro a membro la (30) per p^{2t} , si otterrebbe un'uguaglianza ove il primo membro sarebbe *diverso da zero* e non divisibile per p , mentre il secondo membro sarebbe divisibile per p). Dalla (30), con facili calcoli ed in forza della (19), si ha:

$$(32) \quad [2m - (q - p^l + 1)]^2 = p^{2t-h} - (p^{2l-h} - 1)(q^2 + q + 1).$$

Proviamo che nella (31) vale il segno di uguaglianza. Dalla (29) si ha: $2t - h \leq h + 2l - 2 < h + 2l - 1$ e quindi

$$(33) \quad p^{2t-h} < qp^{2l-1}.$$

Se fosse $2l > h$, si avrebbe:

$$(34) \quad -(p^{2l-h} - 1)(q^2 + q + 1) \leq -p^{2l-h-1}(q^2 + q + 1),$$

onde, sommando le (33) e (34) e tenendo conto della (32), si otterrebbe:

$$[2m - (q - p^l + 1)]^2 < qp^{2l-1} - p^{2l-h-1}(q^2 + q + 1) = -p^{2l-h-1}(q + 1),$$

il che è manifestamente assurdo. Si è così provato che è:

$$(35) \quad h = 2l,$$

e quindi che $q (= p^h)$ è un quadrato.

Dalla (32), in forza della (35), si ottiene:

$$(36) \quad m = [q - \sqrt{q} + 1 \pm p^l/\sqrt{q}]/2.$$

Dalle (19), (36) e (35), si ha poi:

$$(37) \quad n = [q + \sqrt{q} + 1 \pm p^l/\sqrt{q}]/2.$$

Dalle (35) e (29), si ha:

$$(38) \quad (h+2)/2 \leq t \leq (3h-2)/2.$$

Le (1), (2) e (3) attualmente forniscono

$$(39) \quad \begin{aligned} t_m + t_n &= (q^2 + 1) Q_2, & mt_m + nt_n &= kQ_2, \\ m(m-1)t_m + n(n-1)t_n &= k(k-1). \end{aligned}$$

Ricavando t_m, t_n dalle prime due equazioni (39) e sostituendo i valori trovati nella terza, si ottiene:

$$(40) \quad k^2 - k[1 + Q_2(n+m-1)] + nmQ_2(q^2 + 1) = 0.$$

La (40) è un'equazione cui deve soddisfare l'ordine di K. Denotiamo con Δ_3 il discriminante della (40), ossia poniamo

$$(41) \quad \Delta_3 = [1 + Q_2(n+m-1)]^2 - 4nmQ_2(q^2 + 1).$$

Sostituendo le (36), (37) nella (41) si ottiene:

$$(42) \quad \Delta_3 = Q_2[p^{2t} - p^{2h}] + q^3.$$

Dovendo essere $\Delta_3 \geq 0$ (in quanto la (40) ammette radici intere), dovrà aversi $h \leq t$ (infatti, se fosse $t < h$, dalla (42) si avrebbe, essendo $p^{2(h-t)} - 1 > 1$ e $2t > h$, per la (38), $\Delta_3 = q^3 - Q_2 p^{2t} [p^{2(h-t)} - 1] < q^3 - Q_2 p^{2t} < q^3 - Q_2 q = -q(q+1) < 0$, il che è escluso, essendo $\Delta_3 \geq 0$). Dalla (38) allora si ha:

$$(43) \quad h \leq t < h + h/2.$$

La (42) può scriversi:

$$(44) \quad \Delta_3 = q^2 [Q_2(p^{2(t-h)} - 1) + q].$$

Poiché Δ_3 deve essere un quadrato [la (40) ammettendo radici intere], l'intero $Q_2(p^{2(t-h)} - 1) + q$ dev'essere un quadrato. Esiste dunque un intero D tale che:

$$(45) \quad D^2 = Q_2(p^{2(t-h)} - 1) + q,$$

ond'è, per le (44), (45):

$$(46) \quad \sqrt{\Delta_3} = qD.$$

La (40) ammette allora le radici:

$$(47) \quad k = [1 + Q_2(n+m-1) \pm qD]/2.$$

Risolvendo l'equazione (18) e tenuto conto della (28) che fornisce il discriminante di tale equazione, si ha:

$$(48) \quad k_1 = [1 + Q_1(n+m-1) + p^t]/2,$$

$$(49) \quad k_2 = [1 + Q_1(n+m-1) - p^t]/2.$$

Dalla (20), tenuto conto delle (47), (48), (49), ed inoltre delle (36), (37), con facili calcoli si ha:

$$(50) \quad 2u = Q_1 + p^{h+\frac{h}{2}-t} \pm D/p^{t-h}.$$

Poniamo:

$$(51) \quad A = 2u - Q_1 - p^{h-t+h/2},$$

ove A è un intero, essendo h pari e $h-t+h/2 > 0$, per la (43). Dalle (50), (51), si ha:

$$p^{t-h}A = \pm D$$

e quindi, per la (45):

$$p^{2(t-h)}A^2 = Q_2(p^{2(t-h)} - 1) + q = Q_2 p^{2(t-h)} - (q^2 + 1),$$

da cui:

$$(52) \quad q^2 + 1 = p^{2(t-h)}(Q_2 - A^2).$$

Il primo membro della (52) non è divisibile per p . Lo stesso deve quindi accadere per il secondo membro e ciò si ha (essendo $Q_2 - A^2$ un intero) se, e soltanto se, risulta:

$$(53) \quad t = h.$$

Tenuto conto delle (36), (37), (45), (47), (48), (49) e della (53), si conclude con la seguente proposizione:

XIII) - *Se esiste in un $S_{3,q}$ una calotta K di tipo (m, n) , con $2 \leq m < n \leq q-1$, deve essere q un quadrato dispari, inoltre deve aversi (posto $\varepsilon = \pm 1$):*

$$(54) \quad m = [q + 1 - \sqrt{q}(1 - \varepsilon)]/2,$$

$$(55) \quad n = [q + 1 + \sqrt{q}(1 + \varepsilon)]/2,$$

$$(56) \quad k = |K| = [1 + Q_2(q + \varepsilon\sqrt{q}) \pm q\sqrt{q}]/2,$$

$$(57) \quad k_1 = [1 + Q_1(q + \varepsilon\sqrt{q}) + q]/2,$$

$$(58) \quad k_2 = [1 + Q_1(q + \varepsilon\sqrt{q}) - q]/2,$$

ove k_1 e k_2 denotano gli ordini degli archi, sezioni piane di K .

6. - Sia K una calotta di tipo (m, n) di $S_{r,q}$ ($r \geq 4$, $2 \leq m < n \leq q-1$). Le (1), (2), (3) attualmente forniscono:

$$(59) \quad t_m + t_n = (Q_r Q_{r-1})/Q_1, \quad mt_m + nt_n = kQ_{r-1},$$

$$m(m-1)t_m + n(n-1)t_n = k(k-1).$$

Ricavando t_m, t_n dalle prime due precedenti equazioni e sostituendo i valori trovati nella terza, si ottiene:

$$(60) \quad k^2 - k[1 + Q_{r-1}(n + m - 1)] + nm(Q_r Q_{r-1})/Q_1 = 0.$$

Il discriminante Δ_r di tale equazione è:

$$(61) \quad \Delta_r = [1 + Q_{r-1}(n + m - 1)]^2 - 4nm(Q_r Q_{r-1})/Q_1.$$

Un S_3 di $S_{r,q}$ interseca evidentemente K in una calotta di tipo $\langle m, n \rangle$. Per la Proposizione XIII, q deve essere un quadrato dispari ed m, n devono essere dati dalle (54) e (55). Sostituendo questi valori di m ed n nella (61), si ottiene $\Delta_r = q^r$. Risolvendo la (60) si ha infine [tenuto conto delle (54) e (55)]:

$$(62) \quad k = [1 + Q_{r-1}(q + \varepsilon \sqrt{q}) \pm (\sqrt{q})^r]/2.$$

Da quanto precede si ha:

XIV) - *Se esiste in un $S_{r,q}$ ($r \geq 3$) una calotta K di tipo $\langle m, n \rangle$, con $2 \leq m < n \leq q - 1$, q dev'essere un quadrato dispari; inoltre m, n e k debbono essere rispettivamente dati dalle (54), (55), (62), ove $\varepsilon = \pm 1$.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BARLOTTI, *Sui $\{k, n\}$ -archi di un piano lineare finito*, « Boll. U.M.I. », (3) 11, 553-556 (1956).
- [2] B. SEGRE, *Lectures on modern Geometry*, Cremonese, Roma, 1961.
- [3] B. SEGRE, *Introduction to Galois Geometries*, « Mem. Acc. Naz. Lincei », (8) 8, 133-236 (1967).
- [4] M. TALLINI SCAFATI, *Sui $\{k, n\}$ -archi di un piano grafico finito*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 40, 1-6 (1966).
- [5] M. TALLINI SCAFATI, *$\{k, n\}$ -archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 40, (1966). Nota I, 812-818, Nota II, 1020-1025.
- [6] M. TALLINI SCAFATI, *Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un $S_{r,q}$* , « Rend. di Matematica », 26, 273-303 (1967).