
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANTÓNIO J. BRANDÃO LOPES-PINTO

Sur la semi—continuité inférieure

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 53 (1972), n.1-2, p. 46-49.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_46_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi funzionale. — *Sur la semi-continuité inférieure.* Nota di ANTÓNIO JORGE BRANDÃO LOPES PINTO, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Si dà una caratterizzazione della categoria (secondo Baire) degli spazi topologici in termini della semi-continuità delle funzioni ivi definite.

Dans cette note, nous avons présenté les résultats suivants: 1) une caractérisation selon la catégorie (de Baire) des espaces topologiques énoncée en termes de fonctionnelles semi-continues inférieurement; 2) l'équivalence entre la semi-continuité inférieure et la continuité des fonctionnelles convexes définies sur des espaces de Baire.

Ces considérations ont eu leur origine dans l'étude de la minimization des fonctionnelles convexes définies sur des espaces de Banach. Avec celles-là, il a été possible rendre bien facile démontrer des propositions très utiles.

Nous référons quelques papiers (et la bibliographie relative) sur le résultat cité en 2). Ce sont, par exemple, [1], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [14] et [16]. En presque tous ces papiers, ou les fonctionnelles sont des semi-normes ou l'espace est un espace de Banach, au moins.

Le très récent livre [15], nous a servi à obtenir plusieurs résultats sur la catégorie et la semi-continuité. En [2], nous faisons un étude plus approfondi sur des sujets en cette direction-là, en laissant pour cette note seulement les résultats plus directement liés à la minimization.

1. X est toujours un espace topologique non vide, $\gamma: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $X_1 \subset X$ est une fonctionnelle dont le domaine est X_1 et T_γ est le sous-ensemble de X_1 où γ est majorée, i.e., $x_0 \in T_\gamma$ s'il y a un voisinage V de x_0 (en X_1) tel que $\sup_{x \in V \cap X_1} \gamma(x) < +\infty$. C'est clair que $T_\gamma = \bigcup_{n=1} \text{int}_{X_1} Z_n^\gamma$ avec $Z_n^\gamma = \{x: \gamma(x) \leq n\}$ où $\text{int}_{X_1} Z_n^\gamma$ est l'intérieur de Z_n^γ relatif à X_1 (si $X_1 = X$, on écrit $\text{int}_{X_1} A = \mathring{A}$). Donc T_γ est toujours un ouvert de X_1 .

PROPOSITION 1 (voir [2]). *Pour chaque fonctionnelle $\gamma: X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continue inférieurement (s.c.i.), $X \setminus T_\gamma$ est de la première catégorie. Conséquemment $X \setminus \overline{T_\gamma}$ est de la première catégorie.*

THÉORÈME 1.1. *X est un espace de la deuxième catégorie si et seulement si pour chaque fonctionnelle $\gamma: X \rightarrow \mathbb{R}$ s.c.i. on a $T_\gamma \neq \emptyset$.*

Démonstration. La condition nécessaire est trivialement satisfaite.

(*) Nella seduta del 16 giugno 1972.

Condition suffisante: Soit X un espace de la première catégorie, c'est-à-dire, X est un F_σ croissant où chaque ensemble est nondense: $X = \bigcup_{i=1} F_i$, $F_{i+1} \supset F_i$, $\bar{F}_i = F_i$ et $\bar{\bar{F}}_i = \emptyset$ pour chaque $i = 1, \dots$. En définant $\gamma(x) = \inf_{x \in F_n} n$, on a $Z_n^\gamma = \{x : \gamma(x) \leq n\} = F_n$, i.e., γ est semi-continue inférieurement et $T_\gamma = \emptyset$. La contradiction permet de conclure que X est de la deuxième catégorie.

COROLLAIRE 1.1. *X est de la première catégorie si et seulement si il existe une fonctionnelle $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continue inférieurement telle que $T_\gamma = \emptyset$.*

THÉORÈME 1.2. *X est un espace de Baire si et seulement si pour chaque fonctionnelle $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ semi-continue inférieurement on a $\bar{T}_\gamma = X$.*

Démonstration. La condition nécessaire est une conséquence immédiate de la Proposition 1. Condition suffisante: On remarque que par le Théorème 1.1., X est déjà de la deuxième catégorie. Soit $\emptyset$ un ouvert non vide de X que nous supposons de la première catégorie. Donc $\emptyset$ est contenu dans un F_σ d'ensembles non denses: $\emptyset \subset \bigcup_{n=1} F_n$, $F_n = \bar{F}_n$, $\bar{\bar{F}}_n = \emptyset$ quel que soit n . L'on écrit $X = \bigcup_{n=1} (F \cup F_1 \cup \dots \cup F_n) = \bigcup_{n=1} Y_n$ où $F = X \setminus \emptyset$ et $Y_k = F \cup F_1 \cup \dots \cup F_k$ est fermé pour chaque k . Alors la fonctionnelle $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(x) = \inf_{x \in Y_n} n$ est semi-continue inférieurement et on a $T_\gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{I}} \bar{Y}_n = \bar{F}$, i.e., $\bar{T}_\gamma \subset F \neq X$.

On remarque qu'une démonstration plus simple peut être essayée si nous prenons en considération que $\emptyset$ est un ouvert non vide de la première catégorie en soi (voir [2]). En ce cas, le Corollaire 1.1. permet de construire tout de suite une fonctionnelle γ sur X s.c.i. tel que $\bar{T}_\gamma \neq X$.

COROLLAIRE 1.2. ([1], page 45). *Soit X un espace métrique complet non vide. Alors pour chaque fonctionnelle $\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ inférieurement semi-continue on a $\bar{T}_\gamma = X$.*

2. Soit Y un espace linéaire topologique, $K \subset Y$ un sous-ensemble non vide, $\gamma : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle dont son domaine est K . Y est de la deuxième catégorie si et seulement s'il est de Baire.

THÉORÈME 2.1. *Soit Y un espace linéaire topologique de Baire et K un sous-ensemble fermé avec un point interne. Alors $\bar{K} \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit p un point interne à K , i.e., 0 est interne à $K - p$. Car $Y = \bigcup_{n=1} n(K - p)$ on a $\bar{K} \neq \emptyset$.

En particulier, en des espaces linéaires topologiques de Baire (ou tonnelés) il existe la coïncidence des points internes et des points intérieurs pour les convexes fermés.

L'on peut démontrer aisément que le Théorème 2.1. reste valable s'on remplace point interne par point semi-interne ([2]).

THÉOREME 2.2. *Soit Y un espace linéaire topologique de Hausdorff et de Baire. Alors sa dimension est finie ou infinie non-dénombrable.*

Démonstration. Si $\mathcal{B}$ était une base de Hamel dénombrable non finie de Y , $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ chaque espace engendré $H_n = \text{sp}\{e_1, \dots, e_n\}$ est de la première catégorie. Alors $Y = \bigcup_{i=1} H_i$ serait de la première catégorie.

THÉOREME 2.3. *Soit Y un espace linéaire topologique de Baire, $\gamma: Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) γ est semi-continue inférieurement;
- 2) γ est continue en chaque point;
- 3) γ a sous-gradient en chaque point;
- 4) γ est fermé.

Démonstration. Si 1) est vrai, $\bar{T}_\gamma = Y$ par le Théorème 1.2.. Comme $T_\gamma \neq \emptyset$, on vérifie 2) par le Théorème 3.1. de [3]. Les trois premières implications sont alors immédiates (par exemple, voir [4] page 21, [5] ou [17]). La double implication 2) $\Leftrightarrow$ 4) est démontré en [3].

À la fin, on réfère une condition nécessaire et suffisante pour le principe de l'uniforme limitation.

THÉOREME 2.3. *Soit X un espace séparé localement convexe et soit X^* le dual topologique de X muni de la topologie forte (topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de X). Si X^* est tonnelé alors chaque borné faible est borné fort. Si X^* est semi-reflexif, alors la condition réciproque est aussi valable.*

Démonstration: Condition nécessaire: Soit $A \subset X$ un borné faible non vide. Alors $\psi_A(x^*) = \sup_{x \in A} x^*(x)$ est une semi-norme définie sur X^* , finie et semi-continue inférieurement pour la topologie forte de X^* . Donc $\psi_A(\cdot)$ est continue forte. Comme la fonction d'appui de $A: h_A(\cdot)$ vérifie $h_A(\cdot) \leq \psi_A(\cdot)$ et est aussi convexe il résulte que $\overline{\text{co}} A$ est borné fort (par [18] et car $h_A(\cdot) \equiv \equiv h_{\text{co} A}(\cdot)$). Donc A est borné fort. Condition suffisante: Soit $\varphi: X^* \rightarrow \mathbb{R}$ une semi-norme semi-continue inférieurement, alors semi-continue inférieurement pour la topologie affaiblie (X^*, X) . Alors par [18] il y a un ensemble non vide convexe et fermé A tel que $p(\cdot) = h_A(\cdot)$. Comme p est finie et positive, alors A est borné faible qui est borné fort par hypothèse. Donc $p(\cdot)$ est continue forte parce qu'elle est fonction d'appui d'un ensemble borné fort ([18]). Alors, X^* est tonnelé.

Evidemment, le principe usuel pour des espaces X normés est un cas particulier (X^* est toujours de Banach!).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOSANQUET L. S. and KESTELMAN H., *The absolute convergence of a series of integrals*, « Proc. London Math. Soc. », (2) 45, 88–97 (1939).
- [2] BRANDÃO LOPES PINTO A. J., *Catégorie et semi-continuité inférieure*. Istituto matematico « Ulisse Dini », Università degli Studi di Firenze, 1972/18.
- [3] BRANDÃO LOPES PINTO A. J., *Functions with values in an ordered topological linear space. A closed-graph theorem for convex functions*, « Boll. Un. Mat. It. », (4) 5, 255–261 (1972).
- [4] BRANDÃO LOPES PINTO A. J., *Minimi totali in spazi preordinati. I. Esistenza*. Istituto Matematico « Ulisse Dini », Università degli Studi di Firenze, 1972/3.
- [5] BRANDÃO LOPES PINTO A. J., *Banach extension theorem for ordered-complete linear spaces* (à paraître en BUMI).
- [6] BRØNDSTED A., *Conjugate convex functions in topological vector spaces*, « Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. », 34, 2 (1964).
- [7] BRØNDSTED A. and ROCKAFELLAR R. T., *On the subdifferentiability of convex functions*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 16, 605–611 (1965).
- [8] EBERLEIN W. F., *Closure, convexity and linearity in Banach spaces*, « Annals of Math. », 47, 688–703 (1946).
- [9] GELFAND I., *Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires*, « Comm. Soc. Math. », Karkow, 13, 35–40 (1936).
- [10] GELFAND I., *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*. « Mat. Sb. », 4, 235–284 (1938).
- [11] KÖTHE G., *Topologische lineare Räume, I*. Springer-Verlag, Berlin (1960).
- [12] MEDHI M. R., *Continuity of semi-norms on topological vector spaces*, « Studia Math. », 17, 81–86 (1959).
- [13] MOREAU J.-J., *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, « Bull. Soc. Math. France », 93, 273–299 (1965).
- [14] ORLICZ W., *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, « Studia Math. », 1, 1–39 (1928).
- [15] OXTOBY J. C., *Category and measure*, « Lect. Notes in Math. », Springer-Verlag, Berlin (1971).
- [16] ROCKAFELLAR R. T., *Convex functions, monotone operators and variational inequalities. Theory and applications of monotone operators*, Edizioni « Oderisi » (1969).
- [17] BOURBAKI N., *Espaces vectoriels topologiques*. Herman-Paris (1960).
- [18] HÖRMANDER L., *Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe*, « Ark. Mat. », 3 (12), 181–186 (1955).