Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Salvadori

Sul problema della stabilità asintotica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 35–38.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_35_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Equazioni differenziali. — *Sul problema della stabilità asintotica* (*). Nota (**) di LUIGI SALVADORI, presentata dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — Some theorems on asymptotic stability for ordinary differential equations are proved by using two Liapunov functions. Two criteria given by Marachkov and Massera respectively, are generalized and connected to each other as corollaries of the same theorem. Furthermore, it is shown that Massera's criterion is actually a criterion of equiasymptotic stability.

Il Teorema di Liapunov sulla stabilità asintotica (uniforme) della soluzione identicamente nulla di una equazione differenziale del tipo $\dot{x} = f(t, x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $f(0, t) \equiv 0$, è stato, com'è noto, variamente modificato con lo scopo di rimuovervi l'ipotesi che la funzione ausiliaria V sia dotata di estremo superiore infinitesimo. Tra queste modificazioni sono classiche quelle espresse da due Teoremi di stabilità asintotica (semplice) dovuto l'uno a Marachkov (cfr. [3]) e l'altro a Massera (cfr. [4], Teorema 15). Questi Teoremi appaiono molto diversi tra di loro. Nel primo l'ipotesi predetta viene eliminata sotto la condizione che f sia limitata; nel secondo non si suppone niente circa la limitatezza di f, ma si rafforza l'ipotesi di negativa definitezza della derivata di V lungo le soluzioni dell'equazione differenziale.

Nella presente Nota si mostra in primo luogo come, richiedendo l'esistenza di due opportune funzioni ausiliarie V, W, invece che di una sola, sia possibile pervenire ad un teorema generale di stabilità asintotica (Teorema 2.1) dal quale si possono derivare come corollari, particolarizzando in un modo od in un altro la funzione W, entrambi i Teoremi di Marachkov e di Massera. A parte la loro generalizzazione, si consegue cioè il risultato che questi ultimi sono effettivamente teoremi di una stessa specie. Il procedimento col quale si perviene alla dimostrazione si ispira ad una idea di LaSalle (cfr. [2]).

In secondo luogo, si fornisce un teorema di stabilità equiasintotica (Teorema 2.3), facente anch'esso uso di due funzioni ausiliarie. È da rilevare che il Teorema di Massera è un corollario anche di quest'ultimo teorema; cosicchè il Teorema di Massera è in effetti un teorema di stabilità equiasintotica.

Avvertiamo, infine, che il modo con cui si è fatto uso di due funzioni ausiliarie nello studio della stabilità asintotica (1) è diverso da quello che si trova espresso nei Teoremi di Matrosov in [5] ed in teoremi similari.

(*) Questo lavoro è stato svolto nell'ambito di un rapporto di collaborazione scientifica tra le Università di Louvain e di Napoli con il contributo del Fonds National de la Recherche Scientifique (Belgio) e del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Italia).

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1972.

(1) J. L. Corne ha ripreso questo metodo e nuovi risultati, concernenti anche varianti del concetto di stabilità, si troveranno in un suo lavoro di prossima pubblicazione.

1. – Per ogni $\rho > 0$ denotiamo con S_ρ la sfera $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < \rho\}$, essendo $\|\cdot\|$ una qualche norma per $\mathbf{R}^n$. Sia S_μ una tale sfera e sia I un intervallo $]\tau, +\infty[$ con $\tau \in [-\infty, +\infty[$. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

essendo $f : I \times S_\mu \to \mathbf{R}^n$ un'applicazione continua e tale che per ogni $(t_0, x_0) \in I \times S_\mu$ esista una sola soluzione massimale dell'eq. (1.1) relativa alle condizioni iniziali (t_0, x_0). Denoteremo questa soluzione con $x(t, t_0, x_0)$. Supponiamo infine $f(t, 0) \equiv 0$, cosicchè l'eq. (1.1) ammette la soluzione $x \equiv 0$.

Per una funzione $V : I \times S_\mu \to \mathbf{R}$ indicheremo con D^+V la massima derivata destra del Dini lungo le soluzioni dell'eq. (1.1), cioè l'applicazione di $I \times S_\mu$ in $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tale che $\forall (t, x) \in I \times S_\mu$ si abbia

$$D^+V(t, x) = \limsup_{h \to 0^+} \{h^{-1}[V(t+h, x(t+h, t, x)) - V(t, x)]\}.$$

Se V è localmente lipschtziana rispetto ad x, questa derivata può essere espressa direttamente mediante f; può cioè essere calcolata senza conoscere le soluzioni dell'eq. (1.1). Sia infine $c : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ una funzione continua e strettamente crescente, con $c(0) = 0$; una tale funzione, seguendo Hahn (cfr. [1]), si dirà di classe K.

Richiamiamo ora, per comodità, i Teoremi di Marachkov e di Massera ai quali abbiamo dianzi accennato.

1.1 TEOREMA (Marachkov). – *Supponiamo che per l'eq.* (1.1) *esistano una funzione continua* $V : I \times S_\mu \to \mathbf{R}$ *ed un numero* $\rho \in]0, \mu[$ *tali che in* $I \times S_\rho$ *sia:* (α) f *limitata;* (β) V *definita positiva;* (γ) D^+V *definita negativa. Allora, la soluzione* $x \equiv 0$ *dell'eq.* (1.1) *è asintoticamente stabile.*

1.2 TEOREMA (Massera). – *Supponiamo che per l'eq.* (1.1) *esistano una funzione continua* $V : I \times S_\mu \to \mathbf{R}$, *un numero* $\rho \in]0, \mu[$ *ed una funzione* $c : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *di classe* K *tali che in* $I \times S_\rho$ *sia:* (α) V *definita positiva;* (β) $D^+V(t, x) \le -c(V(t, x))$. *Allora, la soluzione* $x \equiv 0$ *dell'eq.* (1.1) *è asintoticamente stabile.*

2. – Dimostriamo ora il seguente

2.1 TEOREMA. – *Supponiamo che per l'eq.* (1.1) *esistano due funzioni continue* $V : I \times S_\mu \to \mathbf{R}$, $W : I \times S_\mu \to \mathbf{R}$, *un numero* $\rho \in]0, \mu[$ *ed una funzione* $c : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *di classe* K *verificanti in* $I \times S_\rho$ *le condizioni seguenti:* (α) V *e* W *siano entrambe definite positive;* (β) $D^+V(t, x) \le -c(W(t, x))$; ($\gamma$) D^+W *sia superiormente od inferiormente limitata. Allora, la soluzione* $x \equiv 0$ *dell'eq.* (1) *è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. – La soluzione $x \equiv 0$ è stabile in virtù del Teorema di Liapunov sulla stabilità semplice e delle ipotesi (α), (β). Basta dunque provare che essa è attrattiva. Stante la stabilità, per ogni $t_0 \in I$ esiste $\sigma(t_0) \in]0, \rho[$

tale che per ogni $x_0 \in S_\sigma$ la soluzione massimale $x(t, t_0, x_0)$ esista in tutto l'intervallo $[t_0, +\infty[$, verificando la condizione $\|x(t, t_0, x_0)\| < \rho \ \forall t \geq t_0$. Supposto dunque $t_0 \in I$ ed $x_0 \in S_\sigma$, proviamo che $x(t, t_0, x_0) \to 0$ per $t \to +\infty$. Stante il carattere di W di funzione definita positiva in $I \times S_\rho$, basta per ciò dimostrare che $W(t, x(t, t_0, x_0)) \to 0$ per $t \to +\infty$. Intanto per ogni $\eta > 0$ e per ogni $t_0' \geq t_0$ esiste un $t \geq t_0'$ tale che $W(t, x(t, t_0, x_0)) < \eta$. In caso contrario, difatti, l'ipotesi (β) implicherebbe $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to -\infty$ per $t \to +\infty$, in contrasto con l'ip. (α). Ciò premesso, sia D^+W superiormente limitata in $I \times S_\rho$. Supponiamo per assurdo che esista un $\lambda > 0$ tale che per ogni $T > 0$ esista un $t \geq t_0 + T$ per il quale $W(t, x(t, t_0, x_0)) \geq \lambda$. Tenendo conto di quanto abbiamo ora provato, si riconosce allora che devono esistere due successioni divergenti $\{t_i'\}$, $\{t_i''\}$ tali che per ogni $i \in \{1, 2, \cdots\}$ si abbia $t_i' < t_i'' < t_{i+1}'$ ed inoltre

$$W(t_i', x(t_i', t_0, x_0)) = \frac{\lambda}{2} \quad , \quad W(t_i'', x(t_i'', t_0, x_0)) = \lambda ,$$

$$\frac{\lambda}{2} < W(t, x(t, t_0, x_0)) < \lambda \qquad \forall t \in]t_i', t_i''[.$$

Data poi la proprietà supposta per D^+W, $\forall i \in \{1, 2, \cdots\}$ si ha $t_i'' - t_i' > l > 0$ con l indipendente da i, e quindi, in virtù dell'ip. (β),

$$V(t_i'', x(t_i'', t_0, x_0)) - V(t_i', x(t_i', t_0, x_0)) < -lc\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

col secondo membro indipendente da i. Si riconosce cioè che $V(t, x(t, t_0, x_0))$ decresce in ognuno degli infiniti intervalli $[t_i', t_i'']$ di una quantità superiore sempre ad uno stesso numero strettamente positivo. Poiché, sempre per l'ip. (β), la funzione $V(t, x(t, t_0, x_0))$ è decrescente in tutto l'intervallo $[t_0, +\infty[$, ne segue l'assurdo $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to -\infty$ per $t \to +\infty$. Analogamente si procede se D^+W è inferiormente limitata in $I \times S_\rho$. Il Teorema è dunque completamente provato.

2.2 OSSERVAZIONE. – Il Teorema 1.1 di Marachkov è un corollario del Teorema 2.1. Difatti le ipotesi del Teorema 1.1 implicano il verificarsi delle ipotesi del Teorema 2.1 con la medesima V e con $W = \|x\|$. Il Teorema 1.2 di Massera è anch'esso un corollario del Teorema 2.1, come si riconosce assumendo in quest'ultimo $W = V$.

Sussiste il seguente altro

2.3 TEOREMA. – *Supponiamo che per l'eq.* (1.1) *esistano due funzioni continue* $V: I \times S_\mu \to \mathbf{R}$, $W: I \times S_\mu \to \mathbf{R}$, *un numero* $\rho \in]0, \mu[$ *ed una funzione* $c: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *di classe* K *verificanti in* $I \times S_\rho$ *le condizioni seguenti*: (α) V *sia inferiormente limitata* (2); (β) W *sia definita positiva*; (γ) $D^+V(t, x) \leq -c(W(t, x))$; ($\delta$) $D^+W(t, x) \leq 0$. *Allora, la soluzione* $x \equiv 0$ *dell'eq.* (1.1) *è equiasintoticamente stabile.*

(2) Ringrazio J. L. Corne per avermi fatto notare che l'ipotesi su V in questo teorema poteva essere indebolita rispetto alla (α) del precedente Teorema 2.1.

Dimostrazione. – La soluzione $x \equiv 0$ è stabile in virtù delle ipotesi (β), (γ). Basta dunque provare che essa è equiattrattiva. Intanto, stante l'ip. (β), esiste una funzione $a : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ di classe K tale che $W(t, x) \geq a(\|x\|)$ $\forall (t, x) \in I \times S_\rho$. Inoltre, supposto $t_0 \in I$, assumiamo, come nella dimostrazione del Teorema 2.1, $\sigma(t_0) \in]0, \rho[$ in maniera che per ogni $x_0 \in S_\sigma$ la soluzione massimale $x(t, t_0, x_0)$ esista in tutto l'intervallo $[t_0, +\infty[$ verificando la condizione $\|x(t, t_0, x_0)\| < \rho$ $\forall t \geq t_0$. Sia $\nu \in]0, \rho[$ e sia $x_0 \in S_\sigma$. Esiste un $t_0' \geq t_0$ tale che $W(t_0', x(t_0', t_0, x_0)) < a(\nu)$. Nel caso contrario difatti si avrebbe, in virtù dell'ip. (γ),

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) < -h(\nu)(t - t_0)$$

con $h(\nu) = c(a(\nu)) > 0$, e quindi $V(t, x(t, t_0, x_0)) \to -\infty$ per $t \to +\infty$, in contrasto con l'ip. (α). Allora, grazie all'ip. (δ), è

$$W(t, x(t, t_0, x_0)) < a(\nu) \qquad \forall t \geq t_0'$$

e quindi $\|x(t, t_0, x_0)\| < \nu$ $\forall t \geq t_0'$. La soluzione $x \equiv 0$ è dunque attrattiva. Per provare che essa è equiattrattiva, osserviamo che se $A \in]0, +\infty[$ è una costante tale che, conformemente all'ipotesi (α), si abbia $V(t, x) > -A$ $\forall (t, x) \in I \times S_\rho$, si può certamente assumere t_0' in maniera che

$$t_0' - t_0 = \frac{V(t_0, x_0) + A}{h(\nu)}. \tag{2.1}$$

Pertanto, posto $\lambda(t_0) = \max\{V(t_0, x_0) : \|x_0\| \leq \sigma(t_0)\}$, le differenze $t_0' - t_0$ che si ottengono mediante la (2.1) per t_0 fissato, al variare di x_0 in S_σ, si possono tutte maggiorare con uno stesso numero positivo $T(t_0, \nu)$ dato da $(\lambda(t_0) + A)/h(\nu)$. Il Teorema 2.3 è dunque dimostrato.

2.4 OSSERVAZIONE. – Se nel Teorema 2.3 si assume $W = V$, si ottiene, come corollario, il Teorema 1.2 di Massera, il quale è dunque, effettivamente, un teorema di stabilità equiasintotica.

BIBLIOGRAFIA

[1] HAHN W., *Stability of motion*, Springer-Verlag, 1967.

[2] LASALLE J. P., *Stability theory for ordinary differential equations*, « J. Diff. Eqs. », *4*, 57–65 (1968).

[3] MARACHKOV M., *Su un teorema di stabilità* (in russo), « Izv. Fiz-Mat. Obs. Kazan Univ. », *12* (3), 171–174 (1940).

[4] MASSERA J. L., *Contributions to stability theory*, « Ann. of Math. », *64*, 182–206 (1956).

[5] MATROSOV V. M., *On the stability of motion*, « PMM (J. appl. math. and mech.) », *26*, 1337–1353 (1962).