Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Albino Canfora

Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 25–28.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_25_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi matematica. — *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico–parabolici del quarto ordine* (*). Nota (**) di ALBINO CANFORA, presentata dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We report on an existence Theorem for the problem in the title.

1. Nel 1959 G. Fichera (1) poneva e studiava un problema al contorno per operatori ellittico–parabolici del 2° ordine. La questione veniva poi ripresa e approfondita, sia pure con diversi metodi, da altri Autori, come A. O. Oleinik (2), Kohn ed L. Nirenberg (3).

In un recente lavoro (4) mi sono occupato di una classe di operatori ellittico–parabolici del 4° ordine per i quali si pongono dei problemi al contorno con condizioni del tipo di Dirichlet, tali condizioni essendo una o due a seconda delle circostanze.

In una Memoria (5) di prossima pubblicazione, che rappresenta la prosecuzione della Memoria già citata in (4), si studiano gli operatori ellittico–parabolici ivi introdotti, ponendosi in una situazione più generale.

Di tale Memoria vogliamo qui preannunciare brevemente i risultati, fornendo anche un esempio concreto di problema al contorno che rientra nel tipo da noi considerato.

2. Ricordiamo, intanto, che un operatore:

$$\mathrm{L} = \sum_{|\alpha| \leq 4} b_\alpha(x')\, \mathrm{D}_{x'}^{\alpha}$$

del quarto ordine, si dice « ellittico–parabolico », se verifica la condizione:

$$\mathrm{L}_0(x'\,;\xi) = \sum_{|\alpha|=4} b_\alpha(x')\, \xi^\alpha \geq 0\,, \qquad \forall x' \in \Omega \quad , \quad \forall \xi \neq 0$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca per l'Analisi Funzionale del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1972.

(1) G. FICHERA, *On a unified Theory of boundary value problems for Elliptic–Parabolic Equations of second order*, Proceedings of a Symposium Conducted by the Mathematics Research Center of the University of Wisconsin, 97–120, Madison (1959).

(2) O. A. OLEINIK, *On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations*, « Doklady Akad. Nauk SSSR », *163*, 577–580 (1965).

(3) J. J. KOHN e L. NIRENBERG, *Degenerate alliptic–parabolic equations of second order*, « Comm. on pure and applied Math. », *20*, 797–872 (1967).

(4) A. CANFORA, *Un problema al contorno per una classe di Operatori Ellittico–Parabolici del 4° ordine. I*, « Ricerche di Matematica », *21*, 86–156 (1972).

(5) A. CANFORA, *Un problema al contorno per una classe di Operatori Ellittico–Parabolic del 4° ordine. II*, « Ricerche di Matematica », *22* (1973).

essendo Ω un dominio regolare, ed x' il suo generico punto. La parte di Ω in cui, per qualche $\xi \neq 0$, risulta: $L_0(x' ; \xi) = 0$, si dice « zona di degenerazione »; la parte rimanente Ω_0, si dice « zona di ellitticità ».

Ebbene si suppone che $\Omega - \Omega_0$ sia l'unione di un numero finito di domini a due a due disgiunti T_i, in ognuno dei quali L si presenta nella forma:

$$L = T(D_x) + A(D_x, D_t) D_t$$

dove t è una delle variabili x'_k, ed x il complesso delle altre variabili. Il significato di t varia, ovviamente, a seconda del dominio T_i in cui ci si trova; si suppone inoltre che, posto: $\Gamma = \partial\Omega$, il pezzo di frontiera $\Gamma \cap T_i$, se non vuoto, sia contenuto in un iperpiano del tipo: $t = c_i =$ costante.

L'operatore $T(D_x)$ è un operatore del quarto ordine, ellittico rispetto ad x; l'operatore $A(D_x, D_t)$ è, in alcune zone T_i, un operatore del secondo ordine, ellittico (positivo o negativo); in altre zone degenera assumendo la forma:

$$(*) \qquad A(D_x, D_t) = pD_t + \sum_{|\alpha|=2} q_\alpha D_x^\alpha ,$$

con $p < 0$ e: $\Sigma q_\alpha \xi^\alpha \geq 0$ (ovvero ≤ 0); ed in altre zone ancora si riduce ad una costante $a \neq 0$. Sia, allora, Γ_2 l'unione dei pezzi di frontiera $\Gamma \cap T_i$ per i quali T_i « sta al di sopra di Γ » (6) ed A è ellittico negativo, oppure T_i « sta al di sotto di Γ » ed A è ellittico positivo.

Siano inoltre:

Γ' l'unione dei pezzi $\Gamma \cap T_i$ per i quali A degenera nella forma (*);

Γ''_1 l'unione dei pezzi $\Gamma \cap T_i$ in cui T_i sta al di sopra di Γ ed A si riduce ad una costante $a > 0$, oppure T_i sta al di sotto di Γ ed A si riduce ad una costante $a < 0$;

Γ''_2 l'unione dei rimanenti pezzi $\Gamma \cap T_i$ in cui A si riduce ad una costante $a \neq 0$;

$\Gamma'' = \Gamma''_1 \cup \Gamma''_2$.

Il risultato principale che viene stabilito è il seguente:

TEOREMA. – *Se* L *è un operatore ellittico–parabolico del tipo ora descritto, a coefficienti reali* $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, *e se inoltre vale la diseguaglianza*:

$$(**) \qquad \int_\Omega u^2 \, dx' \leq \mathbf{K} \int_\Omega u L u \, dx' ,$$

(6) Ciò vuol dire che per i punti $(x, t) \in T_i$, riesce: $t > c_i$.

per ogni funzione reale $u \in H^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2_0(\Omega)$, *allora esiste almeno una soluzione* u *del problema*:

$$(^{***}) \qquad Lu = f \quad \text{in } \Omega \; ; \qquad u\big|_{\Gamma-\Gamma_2''} = 0 \quad , \quad D_\nu u\big|_{\Gamma-\Gamma_2-\Gamma'-\Gamma''} = 0$$

dove f *è assegnata arbitrariamente in* $L_2(\Omega)$. *Questa soluzione presenta, poi, una regolarità tale da poter dire che le condizioni* (***) *sono verificate quasi ovunque.*

3. Diamo ora un esempio concreto di problema del tipo considerato nel Teorema.

Consideriamo dapprima una funzione $\alpha(t) \in C_0^\infty(R)$ verificante la condizione:

$$\alpha(t) \begin{cases} = 1 & \text{in } [0 , 1] \\ \geq 0 & \text{in }]-1 , 0[\cup]1 , 2[\\ = 0 & \text{in }]-\infty , -1] \cup [2 , +\infty[, \end{cases}$$

e poniamo, poi:

$$\varphi_1(t) = \alpha(t-7) - \alpha(t-9)$$

$$\varphi_2(t) = -\alpha(t-5)$$

$$\varphi_3(t) = \alpha(t-1) - \alpha(t-3)$$

$$\varphi_4(t) = \sum_{k=0}^{5} \alpha(3(t-2k)-1) .$$

Consideriamo, inoltre, i domini rettangolari:

$$\Omega = [\varepsilon , 11-\varepsilon] \times [\varepsilon , 11-\varepsilon] \quad ; \quad \Omega' = [\eta , 11-\eta] \times [\eta , 11-\eta]$$

dove: $0 < \varepsilon < \eta < 1$, e siano: $\varphi(x , y)$, $\psi(x , y)$, $\rho(x , y)$ e $\sigma(x , y)$ delle funzioni di classe $C^4(\Omega)$, positive in $\overset{\circ}{\Omega}{}'$, ed identicamente nulle in $\Omega - \Omega'$.

Sia, infine, $c(x , y)$ una funzione continua in Ω ed ivi non minore di una costante $c_0 > 0$.

Ebbene l'operatore differenziale

$$L(D_x , D_y) = D_x^2(\varphi(x , y) D_x^2 \cdot) + D_y^2(\psi(x , y) D_y^2 \cdot) -$$

$$- D_x(\rho(x , y) D_x \cdot) - D_y(\sigma(x , y) D_y \cdot) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{4} (\varphi_k(y) D_x^k \cdot + \varphi_k(x) D_y^k \cdot) + c(x , y) \cdot ,$$

verifica senz'altro in Ω le ipotesi del teorema. La cosa si controlla con facili calcoli, come pure si vede facilmente che:

Γ_2'' è l'unione dei segmenti $\{y=\varepsilon\,, 9\leq x\leq 10\}$, $\{y=11-\varepsilon\,, 7\leq x\leq 8\}$, $\{x=\varepsilon\,, 9\leq y\leq 10\}$, $\{x=11-\varepsilon\,, 7\leq y\leq 8\}$;

Γ_1'' è l'unione dei segmenti $\{y=\varepsilon\,, 7\leq x\leq 8\}$, $\{y=11-\varepsilon\,, 9\leq x\leq 10\}$, $\{x=\varepsilon\,, 7\leq y\leq 8\}$, $\{x=11-\varepsilon\,, 9\leq y\leq 10\}$;

Γ' è l'unione dei segmenti $\{y=\varepsilon\,, 5\leq x\leq 6\}$, $\{y=11-\varepsilon\,, 5\leq x\leq 6\}$, $\{x=\varepsilon\,, 5\leq y\leq 6\}$, $\{x=11-\varepsilon\,, 5\leq y\leq 6\}$;

Γ_2 è l'unione dei segmenti $\{y=\varepsilon\,, 1\leq x\leq 2\}$, $\{y=11-\varepsilon\,, 3\leq x\leq 4\}$, $\{x=\varepsilon\,, 1\leq y\leq 2\}$, $\{x=11-\varepsilon\,, 3\leq y\leq 4\}$.