Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulia Maria Piacentini Cattaneo

Alcune osservazioni sulle potenze del radicale di un anello

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 15–17.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_15_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Algebra. — *Alcune osservazioni sulle potenze del radicale di un anello* (*). Nota (**) di GIULIA MARIA PIACENTINI CATTANEO, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Let R be an associative ring, $\mathcal{S}$ a radical property and P the radical associated to $\mathcal{S}$. In this short paper the powers of P are studied in connection with their annihilators.

1. INTRODUZIONE

Dato un anello associativo R, vari suoi radicali si possono prendere in considerazione: ha un certo interesse, per approfondire la conoscenza di tali radicali ed eventualmente per indagare più a fondo sulla struttura dell'anello, lo studio delle *potenze* di tali radicali. È noto che, attraverso la definizione generale di proprietà radicale (cfr. [1] e [3]) si può fare una trattazione unificata dei vari radicali di un anello, quali sono ad esempio il radicale inferiore di Baer, il radicale di Levitzki, il radicale di Jacobson, il radicale di Brown–McCoy, ecc.

In questa breve Nota esamineremo il comportamento delle potenze di un tale radicale con i loro annullatori. Nel primo paragrafo vengono brevemente richiamate alcune nozioni sulla teoria generale dei radicali di un anello: nel secondo paragrafo si esamina il comportamento degli annullatori delle potenze di un ideale qualsiasi con l'ideale in questione. Si applicheranno, infine, i risultati conseguiti al caso in cui l'ideale sia il radicale dell'anello e si esamineranno più in dettaglio le varie possibilità che possono presentarsi, dando qualche esempio.

2. NOZIONI PRELIMINARI

Richiamiamo brevemente alcune definizioni sulla teoria generale dei radicali, seguendo [2].

Sia $\mathcal{S}$ una proprietà di un anello. Un anello R si dice *$\mathcal{S}$–anello* se possiede la proprietà $\mathcal{S}$. Un ideale di un anello si dice *$\mathcal{S}$–ideale* se, pensato come anello, è un $\mathcal{S}$–anello. Un anello si dice *$\mathcal{S}$–semisemplice* se è privo di $\mathcal{S}$–ideali non nulli. Una proprietà $\mathcal{S}$ prende il nome di *proprietà radicale* se sono verificate le seguenti tre condizioni:

1) Ogni immagine omomorfa di un $\mathcal{S}$–anello è un $\mathcal{S}$–anello.

2) Ogni anello R possiede un $\mathcal{S}$–ideale P che contiene tutti i $\mathcal{S}$–ideali dell'anello.

3) L'anello quoziente R/P è $\mathcal{S}$–semisemplice.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1972.

L'ideale P di cui al numero 2) prende il nome di $\mathcal{S}$–*radicale* dell'anello R. Un anello R si dice $\mathcal{S}$–radicale se R coincide con il proprio $\mathcal{S}$–radicale.

Un esempio di proprietà radicale è data dalla proprietà di essere nil, mentre un esempio di proprietà che non è radicale è data dalla proprietà di essere nilpotente.

3. Alcune proprietà degli annullatori destri delle potenze di un ideale

Sia R un anello e sia ρ un suo ideale bilatero. Si considerino i seguenti ideali bilaterali di R:

$$T = \{x \in R \mid \rho x = (0)\}$$

$$T_2 = \{x \in R \mid \rho^2 x = (0)\}$$

$$\cdots$$

$$T_k = \{x \in R \mid \rho^k x = (0)\}.$$

$$\cdots$$

Risulta ovviamente $T \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k \subseteq T_{k+1} \subseteq \cdots$

È facile dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Sia* ρ *un ideale di un anello e siano i* T_k *definiti come sopra. Due soli casi possono presentarsi*:

a) *Tutti i* T_k *sono nulli*,

b) *Tutti i* T_k *sono diversi da zero.*

Dimostrazione. Sia k il minimo intero positivo tale che T_k sia diverso da zero, e supponiamo che sia $k > 1$. Se $x \in T_k$, $x \neq 0$, risulta $\rho^k x = (0)$ e quindi $\rho(\rho^{k-1} x) = (0)$. Ma allora $\rho^{k-1} x \subseteq T$ ed è $\rho^{k-1} x \neq (0)$: risulterebbe allora $T \neq (0)$, contro l'ipotesi. Deve quindi essere $k = 1$.

Sia ρ un ideale tale che tutti gli annullatori destri T_k delle sue potenze siano diversi da zero. Esaminiamo il comportamento dei T_k con ρ. Nelle ipotesi specificate, sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Due soli casi possono presentarsi*:

b') $\rho \cap T_k = (0)$ $\forall k$,

b'') $\rho \cap T_k \neq (0)$ $\forall k$.

Dimostrazione. Sia $k > 1$ il minimo intero tale che T_k abbia intersezione non nulla con ρ. Sia $x \in \rho \cap T_k$, $x \neq 0$. Risulta allora $\rho^k x = (0)$, onde $\rho(\rho^{k-1} x) = (0)$. Ma $\rho^{k-1} x$ (diverso da zero perché $\rho \cap T_{k-1} = (0)$) è contenuto in $\rho \cap T$, onde sarebbe $\rho \cap T \neq (0)$, contro la minimalità di k. Dunque $k = 1$.

Si ha inoltre, nel caso in cui sia $\rho \cap T_k = (0)$ per qualche k, la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Sia* ρ *un ideale non nullo di un anello* R, *tale che risulti* $\rho \cap T_k = (0)$ *per qualche* k *(e quindi per ogni* k*). Allora tutti i* T_k *sono uguali fra loro.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che sia $T_k \subsetneq T_{k+1}$. Esiste allora un x tale che $\rho^{k+1} x = (0)$, mentre $\rho^k x \neq (0)$. Ma $\rho^k x \subseteq \rho \cap T$, onde sarebbe $\rho \cap T \neq (0)$.

Nel caso in cui sia $\rho \cap T_k \neq (0)$, allora l'ideale $\rho \cap T_k$ è nilpotente. Ricordando che un anello semiprimo è un anello privo di ideali nilpotenti non nulli, si può quindi osservare che ogni ideale di un anello semiprimo ha intersezione nulla con tutti gli annullatori destri T_k delle sue potenze e che tali annullatori coincidono a due a due.

4. SUGLI ANNULLATORI DELLE POTENZE DEL RADICALE DI UN ANELLO

Sia $\mathcal{S}$ una proprietà radicale di un anello R e sia $P = P(R)$ il radicale relativo a tale proprietà. Si indichi con T_k^P l'annullatore destro della potenza k–esima di P: per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente, due soli casi si possono presentare:

A) Tutti gli annullatori T_k^P sono uguali a zero.
B) Tutti gli annullatori T_k^P sono diversi da zero.

Questi due casi si presentano effettivamente: il primo quando, ad esempio, R è privo di divisori dello zero ed è $P \neq (0)$. Il caso B si presenta invece, ad esempio, in un anello R con D.C.C., nel caso in cui il radicale P coincida con il nil–radicale N (ossia con l'unione di tutti gli ideali nil dell'anello) di R: sotto queste condizioni infatti P risulta nilpotente.

Abbiamo visto che, nel secondo caso, si possono presentare solo le seguenti possibilità:

B′) $P \cap T_k^P = (0) \quad \forall k$
B″) $P \cap T_k^P \neq (0) \quad \forall k$.

La proposizione 3, nel caso in cui l'ideale che si prende in considerazione sia il radicale dell'anello, si legge al modo seguente:

PROPOSIZIONE 3′. *Sia* R *un anello non* $\mathcal{S}$*–semisemplice. Detto* T_k^P *l'annullatore di* P^k, $k = 1, 2, \cdots$, *se risulta* $P \cap T_k^P = (0)$ *per qualche* k, *tutti i* T_k^P *sono uguali fra loro.*

Il caso B′ si presenta per il radicale di Jacobson $J = J(R)$ del seguente anello R: siano $A = \left\{ \frac{2m}{2n+1} \,\middle|\, m, n \in Z \text{ e } (2m, 2n+1) = 1 \right\}$ = radicale di Jacobson dell'anello ottenuto dagli interi Z localizzandolo al primo 2, B un campo. Si definisca $R = A \oplus B$. Risulta $J = J(R) = A \oplus (0)$ e $T^J = (0) \oplus B$.

Il caso B″ si realizza considerando un anello R con D.C.C., il suo nil–radicale $N = N(R)$ e supponendo che R non sia N–semisemplice. Infatti, in tale ipotesi N è nilpotente e risulta $N \cap T_k^N \neq (0)$ $(k = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMITSUR S. A., *A general theory of radicals*, I, «Am. J. Math.», *74*, 774–786 (1952); *A general theory of radicals*, II; «Am. J. Math.», *76*, 100–125 (1954); *A general theory of radicals*, III, «Am. J. Math.», *76*, 126–136 (1954).
[2] DIVINSKY N., *Rings and radicals*, London George Allen Unwin Ltd. 1965.
[3] KUROSH A., *Radicals of rings and algebras*, «Mat. Sb.», *33*, 13–26 (1953).