
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIOVANNA BOSCHI PETTINI

**Su alcune formule approssimate per i sistemi
meccanici non autonomi. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 53 (1972), n.1-2, p.
139–143.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_139_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Su alcune formule approssimate per i sistemi meccanici non autonomi* (*). Nota II (**) di GIOVANNA BOSCHI PETTINI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The Author exposes some applications of the results of the first note, in particular to the double pendulum.

1. — Si consideri un sistema meccanico che, riferito a coordinate q_1, q_2 , presenti le seguenti espressioni per la parte T_2 dell'energia cinetica, di secondo grado nelle $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ e per l'energia potenziale V :

$$(1) \quad T_2 = \frac{1}{2} (A_1 \dot{q}_1^2 + 2 B \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_2 \dot{q}_2^2)$$

$$(2) \quad V = \frac{1}{2} (C_1 q_1^2 + C_2 q_2^2)$$

dove A_1, B, A_2, C_1 e C_2 sono coefficienti per ora costanti e positivi (escluso al più B) e tali che $B^2 < A_1 A_2$.

Supposto l'energia cinetica del sistema $T = T_2$, ricerchiamo le condizioni strutturali per cui si possano avere moti con $q_1(t) = q_2(t) = q(t)$.

Dalle equazioni di Lagrange si ha subito:

$$(3) \quad (A_1 + B) \ddot{q} = -C_1 q, \quad (A_2 + B) \ddot{q} = -C_2 q$$

e quindi deve essere verificata la condizione strutturale:

$$(4) \quad (A_1 + B) C_2 = (A_2 + B) C_1.$$

Supposta dunque valida la (4), trasformiamo T_2 e V in coordinate normali Q_1 e Q_2 ponendo:

$$(5) \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{\beta}} Q_2, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} Q_1 + \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{\sqrt{\beta}} Q_2$$

con (1):

$$(6) \quad \alpha = A_1 + 2B + A_2, \quad \beta = A_1 - 2 \frac{C_1}{C_2} B + \frac{C_1^2}{C_2^2} A_2.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematici del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1972.

(1) Come si verifica facilmente, α e β sono positivi.

Si ha così, tenendo poi conto di (4):

$$(7) \quad T = \frac{1}{2} \left[\frac{A_1 + 2B + A_2}{\alpha} \dot{Q}_1^2 + \frac{A_1 - 2\frac{C_1}{C_2}B + \frac{C_1^2}{C_2^2}A_2}{\beta} \dot{Q}_2^2 \right] + \\ + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} \left[\frac{C_1}{C_2}(A_2 + B) - (A_1 + B) \right] \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 = \frac{1}{2} (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2)$$

$$(8) \quad V = \frac{1}{2} \left[\frac{C_1 + C_2}{\alpha} Q_1^2 + \frac{C_1}{\beta} \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) Q_2^2 \right] - \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \left(C_1 - C_2 \frac{C_1}{C_2} \right) Q_1 Q_2 = \\ = \frac{1}{2} (\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2)$$

con:

$$(9) \quad \omega_1^2 = \frac{C_1 + C_2}{\alpha} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{C_1}{\beta} \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right).$$

Ciò posto, supponiamo ora i coefficienti A_1, A_2, B, C_1, C_2 variabili lentamente col tempo (cioè funzioni di $\tau = \varepsilon t$) però soddisfacenti ancora alla (4), in un certo intervallo $[0, L]$ ($L > 0$ e del resto arbitrario).

Allora, per le (7) e (8), l'espressione di V in funzione di Q_1, Q_2 rimane la medesima, mentre la T risulta somma di un termine di secondo grado nelle $\dot{Q}_i$ ($i = 1, 2$) espresso dalla (7), di termini lineari nelle $\dot{Q}_i$ ($i = 1, 2$) e termini indipendenti dalle $\dot{Q}_i$ ($i = 1, 2$). Più precisamente, la lagrangiana assume la forma (2) della Nota precedente ove:

$$(10) \quad \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_1^2 Q_1^2 - \omega_2^2 Q_2^2)$$

e, di conseguenza, vale la nostra soluzione approssimata che, come si è detto, dipende solo da $\mathcal{L}_2$ (2).

Pertanto, tenendo presente la (5), si può scrivere:

$$(11) \quad q_1 = \sqrt{\frac{2\mathcal{J}_{10}}{\alpha\omega_1}} \sin \left(\int_0^t \omega_1(\tau) d\tau + \gamma_1 \right) - \sqrt{\frac{2\mathcal{J}_{20}}{\beta\omega_2}} \sin \left(\int_0^t \omega_2(\tau) d\tau + \gamma_2 \right) \\ q_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{J}_{10}}{\alpha\omega_1}} \sin \left(\int_0^t \omega_1(\tau) d\tau + \gamma_1 \right) + \frac{C_1}{C_2} \sqrt{\frac{2\mathcal{J}_{20}}{\beta\omega_2}} \sin \left(\int_0^t \omega_2(\tau) d\tau + \gamma_2 \right).$$

(2) Si può anche supporre che nella Lagrangiana espressa mediante le q_i ($i = 1, 2$) intervengano termini del tipo $\dot{q}_i q_j$ e $q_i q_j$ ($i, j = 1, 2$), termini lineari in $q_i \dot{q}_i$ e termini dipendenti solo da t . Nella [1] (citata nella prima Nota) sono indicate le condizioni affinché la lagrangiana nelle Q_i abbia la forma: $\mathcal{L}_2 + \varepsilon \mathcal{L}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{L}_0$.

Si noti che, se le condizioni iniziali sono tali che $\mathfrak{J}_{20} = 0$, risulta in ogni istante $q_1(t) = q_2(t)$ e quindi, se i coefficienti dell'energia cinetica e potenziale soddisfano la condizione strutturale (4) e variano molto lentamente col tempo, possono aversi moti per cui è in ogni istante di un intervallo $[0, L/\varepsilon]$ e con un errore dell'ordine di ε , $q_1(t) = q_2(t)$.

2. — Come caso particolare consideriamo il seguente problema relativo al bipendolo [1] di lunghezza variabile.

Ad un solido pesante S_1 di baricentro G_1 , girevole attorno ad un asse a_1 fisso ed orizzontale, è collegato un secondo corpo pesante S_2 di baricentro G_2 , girevole attorno ad un asse a_2 solidale con S_1 e parallelo ad a_1 . Sia π il piano verticale in cui si muove G_1 . Tale piano incontra a_1 e a_2 rispettivamente nei punti O_1 e O_2 ; O_1, O_2 e G_1 siano allineati, inoltre anche G_2 si muova su π .

Con opportuni dispositivi si faccia in modo che la distanza l_1 di G_1 da O_1 e la distanza l_2 di G_2 da O_2 non si mantengano costanti nel tempo come nel caso del bipendolo ordinario ma siano funzioni del tempo cioè $l_1 = l_1(t)$, $l_2 = l_2(t)$.

Allora, dette m_1, m_2 le masse di S_1 e S_2 , I_1 e I_2 i momenti di inerzia rispettivamente di S_1 rispetto ad un asse per G_1 normale a π e di S_2 rispetto ad un asse per G_2 pure normale a π , supporremo I_1 e I_2 costanti nel tempo, come la distanza r di G_1 da O_2 .

Ora, se θ_1 e θ_2 sono gli angoli (orientati in senso antiorario) che $O_1 G_1$ e $O_2 G_2$ formano con la verticale orientata verso il basso, l'energia cinetica del sistema ha la seguente espressione (v_{G_1} e v_{G_2} velocità di G_1 e G_2 rispettivamente):

$$(12) \quad T = \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 v_{G_1}^2 + m_2 v_{G_2}^2)$$

cioè, con semplici calcoli, si ha (3):

$$(13) \quad \begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_2^2 + m_1 \dot{l}_1^2 + m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \\ & + \frac{1}{2} m_2 \{ \dot{l}_1^2 + (l_1 + r)^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{l}_2^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \\ & - 2 [(l_1 + r) \dot{l}_2 \dot{\theta}_1 - \dot{l}_1 l_2 \dot{\theta}_2] \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ & + 2 [(l_1 + r) l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{l}_1 \dot{l}_2] \cos(\theta_1 - \theta_2) \}. \end{aligned}$$

(3) Basta tener presente che, detti $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ i versori di $G_1 - O_1$ e $G_2 - O_2$ rispettivamente e $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ i versori ottenuti rispettivamente ruotando nel piano π $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ in senso antiorario di $\pi/2$, si ha:

$$\mathbf{v}_{G_1} = \dot{l}_1 \mathbf{r}_1 + l_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{n}_1 \quad ; \quad \mathbf{v}_{G_2} = \mathbf{v}_{O_2} + \dot{l}_2 \mathbf{r}_2 + l_2 \dot{\theta}_2 \mathbf{n}_2.$$

Per l'energia potenziale del sistema si ha poi:

$$(14) \quad V = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g [(l_1 + r) \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2].$$

Ricaviamo, ora, le equazioni di Lagrange e, posto in esse $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, ricerchiamo le condizioni affinché il bipendolo ruoti come un corpo rigido.

Con semplici calcoli si ha:

$$(15) \quad [I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + r) l_2 + m_2 (l_1 + r)^2] \ddot{\theta} + 2 [m_1 l_1 \dot{l}_1 + m_2 (l_1 + r) \dot{l}_2 + m_2 (l_1 + r) \dot{l}_1] \dot{\theta} = - [m_1 l_1 + m_2 (l_1 + r)] g \sin \theta$$

$$(16) \quad [I_2 + m_2 l_2^2 + m_2 (l_1 + r) l_2] \ddot{\theta} + 2 m_2 (l_2 \dot{l}_2 + \dot{l}_1 l_2) \dot{\theta} = - m_2 l_2 g \sin \theta.$$

Ora, affinché le (15) e (16) siano compatibili per ogni valore delle condizioni iniziali per θ e $\dot{\theta}$, devono essere soddisfatte le relazioni:

$$(17) \quad m_1 l_1 + m_2 (l_1 + r) = F(t) m_2 l_2$$

$$(18) \quad m_1 l_1 \dot{l}_1 + m_2 (l_1 + r) (\dot{l}_1 + \dot{l}_2) = F(t) m_2 l_2 (\dot{l}_1 + \dot{l}_2)$$

$$(19) \quad I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + r) l_2 + m_2 (l_1 + r)^2 = F(t) [I_2 + m_2 l_2^2 + m_2 (l_1 + r) l_2]$$

ove $F(t)$ indica una funzione del tempo.

Moltiplicando la (17) per $(\dot{l}_1 + \dot{l}_2)$ e poi sottraendo fra loro la (17) così modificata e la (18) si ha:

$$(20) \quad m_1 l_1 \dot{l}_2 = 0$$

da cui, necessariamente, si deduce che l_2 è costante.

Eliminando poi $F(t)$ fra la (17) e la (19) si ha:

$$(21) \quad [I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + r) l_2 + m_2 (l_1 + r)^2] m_2 l_2 = \\ = [m_1 l_1 + m_2 (l_1 + r)] [I_2 + m_2 l_2^2 + m_2 (l_1 + r) l_2].$$

da cui si deduce che anche l_1 è costante.

Quindi, a rigore, il moto del bipendolo come se fosse rigido può avvenire solo quando l_1 e l_2 sono costanti.

Però, limitandoci intanto a considerare le piccole oscillazioni del bipendolo, T_2 e V assumono la forma (1) e (2) con i coefficienti espressi da:

$$(22) \quad A_1 = I_1 + m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + r)^2 \quad ; \quad A_2 = I_2 + m_2 l_2^2 \quad ; \quad B = m_2 l_2 (l_1 + r) \\ C_1 = m_1 g l_1 + m_2 g (l_1 + r) \quad ; \quad C_2 = m_2 g l_2$$

sicché la (21) è equivalente alla (4).

Ora, per quanto si è osservato nella Nota precedente, se l_1 e l_2 sono variabili però in maniera infinitamente lenta (cioè $l_1 = l_1(\varepsilon t)$, $l_2 = l_2(\varepsilon t)$) ed è soddisfatta la (21), con opportuna scelta delle condizioni iniziali si possono avere moti in cui, nei limiti delle nostre approssimazioni, risulti $\theta_1 = \theta_2$ cioè il bpendolo si muove ancora, approssimativamente, come un corpo rigido.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Cfr. T. LEVI CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Zanichelli (Bologna), Cap. VII, § 4.