Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanna Boschi Pettini

Su alcune formule approssimate per i sistemi meccanici non autonomi. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 133–138.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_133_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Meccanica. — *Su alcune formule approssimate per i sistemi meccanici non autonomi* (*). Nota I (**) di GIOVANNA BOSCHI PETTINI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The Author gives a simple proof for the approximate formula for the oscillations of a mechanical system in which the constraints and the potential are variable very slowly with time.

1. – In una Nota precedente [1], valendomi della teoria degli invarianti adiabatici e riprendendo anche ricerche di G. Aymerich [2], ho esposto un metodo di integrazione approssimata per le equazioni dei piccoli moti intorno ad una posizione di equilibrio stabile qualora i vincoli e il potenziale siano lentamente variabili nel tempo (1). In altre parole, ho, in sostanza, considerato un sistema meccanico a n gradi di libertà (in questa Nota, per brevità di esposizione, ho supposto $n = 2$) la cui lagrangiana, con opportuna scelta delle coordinate Q_i, ha l'espressione:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q_i , \dot{Q}_i , \tau) \quad ; \quad \tau = \varepsilon t, \qquad i = 1 , 2, \tag{1}$$

dove t è il tempo, ε un parametro molto piccolo che caratterizza la lentezza con cui variano i vincoli e il potenziale (2). Inoltre, per l'ipotesi dei piccoli moti, la lagrangiana contiene al più termini di secondo grado nelle Q_i e $\dot{Q}_i$.

In queste Note, valendomi di una trasformazione introdotta nella meccanica non–lineare da Van der Pol [3], ma opportunamente modificata, ho ritrovato anzitutto i risultati del lavoro precedente per una via assai più semplice. Inoltre (e questo risultato mi sembra di qualche interesse) ho potuto rimuovere l'ipotesi piuttosto restrittiva, ma necessaria quando si applicano gli invarianti adiabatici (3) (e anche applicando una trasformazione analoga a quella di Kryloff–Bogoliuboff), per cui non esista alcun valore di i tale che $Q_i = \dot{Q}_i = 0$ all'istante iniziale o, più brevemente, che in quell'istante tutte le coordinate e le loro derivate rispetto al tempo siano discoste dalla posizione di equilibrio.

Esporremo più innanzi le formule approssimate per Q_i e $\dot{Q}_i$; osserviamo però sin d'ora che esse sono valide con un errore dell'ordine di ε e per un

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematici del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1972.

(1) Più precisamente ho supposto che le forze ammettano potenziale funzione esplicita del tempo t e variabile lentamente al variare di t, s'intende considerando costanti le coordinate lagrangiane.

(2) Poichè la lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo, il sistema meccanico è non autonomo.

(3) Cfr. [1], & 4.

intervallo di tempo $[0, L/\varepsilon]$ ($L > 0$ e del resto arbitrario) e che, sotto opportune condizioni, potrebbero estendersi anche a tutto l'intervallo di tempo $[0, \infty)$.

Come applicazione dei risultati ottenuti, ho considerato un sistema meccanico soddisfacente a particolari condizioni strutturali per cui, nell'ipotesi che la lagrangiana non dipenda esplicitamente dal tempo (4), possano aversi moti con $q_1(t) = q_2(t)$, dove q_1 e q_2 sono coordinate lagrangiane espressive dal punto di vista meccanico. Ho dimostrato che, se quelle particolari condizioni strutturali sono soddisfatte, istante per istante, possono ancora aversi moti, nei limiti della nostra approssimazione, per cui $q_1(t) = q_2(t)$. In particolare ho ricercato se un bipendolo di lunghezza variabile può muoversi come un corpo rigido ed ho dimostrato che tale moto è possibile solo nelle nostre approssimazioni e se sono soddisfatte istante per istante le ben note condizioni strutturali.

2. – Nella [1] si è provato che la lagrangiana del sistema si può mettere nella forma:

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad \mathfrak{L} = \frac{1}{2}[\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_1^2(\tau)Q_1^2 - \omega_2^2(\tau)Q_2^2] &+ \\
+ \varepsilon[l_1(\tau)\dot{Q}_1 + l_2(\tau)\dot{Q}_2 + \lambda_{11}(\tau)\dot{Q}_1Q_1 + \lambda_{12}(\tau)\dot{Q}_1Q_2 &+ \\
+ \lambda_{21}(\tau)Q_1\dot{Q}_2 + \lambda_{22}(\tau)\dot{Q}_2Q_2] &+ \\
+ \varepsilon^2[\alpha_0(\tau) + \alpha_1(\tau)Q_1 + \alpha_2(\tau)Q_2 + \alpha_{11}(\tau)Q_1^2 + \alpha_{22}(\tau)Q_2^2 &+ \\
+ (\alpha_{12}(\tau) + \alpha_{21}(\tau))Q_1Q_2] = \mathfrak{L}_2 + \varepsilon\mathfrak{L}_1 + \varepsilon^2\mathfrak{L}_0 &
\end{aligned}
$$

dove (5) $\omega(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\lambda(\tau)$ sono funzioni note di $\tau = \varepsilon t$, e con ovvio significato di $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_0$. Sulle $\omega(\tau)$, $\alpha(\tau)$, $\lambda(\tau)$ faremo le stesse ipotesi di continuità e derivabilità in $[0, L]$ ($L > 0$ e del resto arbitrario) della Nota [1]; inoltre in $[0, L]$ si supporrà $\omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau)$ positive e diverse fra loro.

Tenendo presente che, se $f(\tau)$ è una funzione derivabile di τ, risulta (6):

$$
(3) \qquad \frac{d}{dt} f(\tau) = \dot{f}(\tau) = \varepsilon \frac{df(\tau)}{d\tau} = \varepsilon f'(\tau)
$$

le equazioni di Lagrange si scrivono:

$$
(4) \qquad \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = \varepsilon(\lambda_{21} - \lambda_{12})\dot{Q}_2 + \varepsilon^2 F_1(Q_1, Q_2)
$$

$$
(5) \qquad \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = \varepsilon(\lambda_{12} - \lambda_{21})\dot{Q}_1 + \varepsilon^2 F_2(Q_1, Q_2)
$$

(4) Questa ipotesi verrà meglio precisata in seguito (Nota II).

(5) Per semplicità tipografica scriveremo, ove non vi sia luogo a equivoco, ω_1^2 invece di $\omega_1^2(\tau)$, e così per gli altri simboli.

(6) Indichiamo dunque con $f'(\tau)$ la derivata di $f(\tau)$ rispetto a τ e con $\dot{f}(\tau)$ la derivata di $f(\tau)$ rispetto a t.

ove si è posto:

$$\text{(6)}\qquad F_1(Q_1, Q_2) = \left[\left(2\alpha_{11} - \frac{d\lambda_{11}}{d\tau}\right) Q_1 + \left(\alpha_{12} + \alpha_{21} - \frac{d\lambda_{12}}{d\tau}\right) Q_2 + \alpha_1 - \frac{dl_1}{d\tau}\right]$$

$$F_2(Q_1, Q_2) = \left[\left(2\alpha_{22} - \frac{d\lambda_{22}}{d\tau}\right) Q_2 + \left(\alpha_{12} + \alpha_{21} - \frac{d\lambda_{21}}{d\tau}\right) Q_1 + \alpha_2 - \frac{dl_2}{d\tau}\right].$$

Per risolvere le (4) e (5) introduciamo nuove incognite $u_1(t)$, $u_2(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ legate alle Q_1, Q_2, $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_2$ dalle relazioni in cui [7]:

$$\text{(7)}\qquad \theta_1(t) = \int_0^t \omega_1(\tau)\, dt \quad , \quad \theta_2(t) = \int_0^t \omega_2(\tau)\, dt$$

$$\text{(8)}\qquad Q_1 = \frac{u_1(t)}{\sqrt{\omega_1}} \operatorname{sen}\theta_1(t) + \frac{v_1(t)}{\sqrt{\omega_1}} \cos\theta_1(t)$$

$$\text{(9)}\qquad Q_2 = \frac{u_2(t)}{\sqrt{\omega_2}} \operatorname{sen}\theta_2(t) + \frac{v_2(t)}{\sqrt{\omega_2}} \cos\theta_2(t)$$

$$\text{(10)}\qquad \dot{Q}_1 = \sqrt{\omega_1}\, u_1(t) \cos\theta_1(t) - \sqrt{\omega_1}\, v_1(t) \operatorname{sen}\theta_1(t)$$

$$\text{(11)}\qquad \dot{Q}_2 = \sqrt{\omega_2}\, u_2(t) \cos\theta_2(t) - \sqrt{\omega_2}\, v_2(t) \operatorname{sen}\theta_2(t).$$

Derivando la (8) rispetto al tempo e confrontando poi il risultato con la (10), si ha:

$$\text{(12)}\qquad \frac{\dot{u}_1}{\sqrt{\omega_1}} \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{\dot{v}_1}{\sqrt{\omega_1}} \cos\theta_1 = \varepsilon \frac{\omega_1'}{2\omega_1} Q_1.$$

Derivando la (10) rispetto al tempo e sostituendo poi nella (4), riesce:

$$\text{(13)}\qquad \sqrt{\omega_1}\, \dot{u}_1 \cos\theta_1 - \sqrt{\omega_1}\, \dot{v}_1 \operatorname{sen}\theta_1 =$$

$$= \varepsilon \left[(\lambda_{21} - \lambda_{12}) \dot{Q}_2 - \frac{\omega_1'}{2\omega_1} \dot{Q}_1\right] + \varepsilon^2 F_1(Q_1, Q_2).$$

Riunendo le due condizioni (12) e (13) si ottiene un sistema di Cramer che, risolto, porge (si ponga per brevità $\lambda_{21} - \lambda_{12} = \lambda$):

$$\dot{u}_1 = \varepsilon \frac{\omega_1'}{2\sqrt{\omega_1}} \operatorname{sen}\theta_1 Q_1 + \varepsilon \frac{\lambda}{\sqrt{\omega_1}} \cos\theta_1 \dot{Q}_2 -$$

$$- \varepsilon \frac{\omega_1'}{2\omega_1\sqrt{\omega_1}} \cos\theta_1 \dot{Q}_1 + \varepsilon^2 \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\omega_1}} F_1(Q_1, Q_2)$$

che, tenuto conto di (8), (10) e (11), diventa:

$$\text{(14)}\qquad \dot{u}_1 = -\varepsilon \frac{\omega_1'}{2\omega_1} u_1 \cos 2\theta_1 + \varepsilon \frac{\omega_1'}{2\omega_1} v_1 \operatorname{sen} 2\theta_1 +$$

$$+ \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} (u_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - v_2 \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + \varepsilon^2 \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\omega_1}} F_1(Q_1, Q_2)$$

(7) Nella trasformazione di Van der Pol non compaiono i fattori $\sqrt{\omega_1}$, $\sqrt{\omega_2}$ o i loro inversi. L'introduzione di tali fattori rende assai più agevole l'integrazione approssimata delle (4) e (5).

e, in modo analogo:

$$\dot{v}_1 = \varepsilon \frac{\omega_1'}{2\,\omega_1} u_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 + \varepsilon \frac{\omega_1'}{2\,\omega_1} v_1 \cos 2\,\theta_1 - \tag{15}$$

$$- \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} (u_2 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - v_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) - \varepsilon^2 \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\sqrt{\omega_1}} F_1(Q_1 , Q_2) .$$

Poichè analoghe formule valgono per u_2 e v_2, il sistema (4) e (5) è stato ridotto ad un sistema del primo ordine in u_1, v_1, u_2 e v_2. Siano poi u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20} rispettivamente i valori iniziali di u_1, v_1, u_2 e v_2, facilmente calcolabili mediante (8), (9), (10) e (11) con i valori iniziali di Q_i e $\dot{Q}_i$ $(i = 1 , 2)$.

Per ottenere un'integrazione approssimata delle (14), (15) osserviamo anzitutto che, per proprietà delle equazioni differenziali, prefissato un numero $\eta > 0$ e del resto arbitrario, esiste un intervallo di tempo $[0 , h)$ in cui:

$$|u_i - u_{i_0}| < \eta \quad ; \quad |v_i - v_{i_0}| < \eta , \qquad i = 1 , 2 . \tag{16}$$

In questo intervallo, gli ultimi termini delle (14), (15) sono [8] $o(\varepsilon^2)$, inoltre, sempre per (14) e (15), $\dot{u}$ e $\dot{v}$ sono $o(\varepsilon)$.

Ora si ha, tenendo anche presente la (3):

$$\varepsilon \frac{\omega_1'}{2\,\omega_1} u_1 \cos 2\,\theta_1 = \varepsilon \frac{\omega_1'}{4\,\omega_1^2} u_1 \frac{d}{dt} \operatorname{sen} 2\,\theta_1 = \varepsilon \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_1'}{4\,\omega_1^2} u_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 \right] -$$

$$- \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_1'}{4\,\omega_1^2} \right) u_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 - \varepsilon \frac{\omega_1'}{4\,\omega_1^2} \dot{u}_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 = \frac{\varepsilon}{4} \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_1'}{\omega_1^2} u_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 \right] + o(\varepsilon^2)$$

e in modo analogo si ha anche:

$$\varepsilon \frac{\omega_1'}{2\,\omega_1} v_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 = - \frac{\varepsilon}{4} \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_1'}{\omega_1^2} v_1 \cos 2\,\theta_1 \right] + o(\varepsilon^2) .$$

Si ha poi, con considerazioni analoghe:

$$\varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} (u_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - v_2 \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon\lambda \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} [\cos (\theta_1 + \theta_2) u_2 - \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2) v_2 + \cos (\theta_1 - \theta_2) u_2 + \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2) v_2] =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \frac{d}{dt} \left[\frac{\lambda \sqrt{\omega_2}}{\sqrt{\omega_1} (\omega_1 + \omega_2)} (\operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2) u_2 + \cos (\theta_1 + \theta_2) v_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda \sqrt{\omega_2}}{\sqrt{\omega_1} (\omega_1 - \omega_2)} (\operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2) u_2 - \cos (\theta_1 - \theta_2) v_2) \right] + o(\varepsilon^2) .$$

(8) Diremo che una funzione $f(t)$ è, in un certo intervallo, un $o(\varepsilon^n)$ quando $|f(t)| \leq \varepsilon^n N(\varepsilon t)$, con $N(\varepsilon t)$ continua, positiva e limitata in quell'intervallo. Ovviamente: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega_i}\right) = o(\varepsilon)$; $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{\omega_i}\right) = o(\varepsilon^2)$, $i = 1, 2$.

Tenendo presente tutti i risultati ottenuti, si può allora scrivere la (14) nella forma:

$$\dot{u}_1 = -\frac{1}{4}\,\varepsilon\,\frac{d}{dt}\Big\{[u_1 \operatorname{sen} 2\,\theta_1 + v_1 \cos 2\,\theta_1]\,\frac{\omega_1'}{\omega_1^2} - \tag{17}$$

$$- 2\lambda\,\frac{\sqrt{\omega_2}}{\sqrt{\omega_1}\,(\omega_1+\omega_2)}\,[\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\,u_2 + \cos(\theta_1+\theta_2)\,v_2] -$$

$$- 2\lambda\,\frac{\sqrt{\omega_2}}{\sqrt{\omega_1}\,(\omega_1-\omega_2)}\,[\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\,u_2 - \cos(\theta_1-\theta_2)\,v_2]\Big\} + o(\varepsilon^2).$$

Ora, posto il complesso di termini racchiuso fra parentesi graffe, moltiplicato per 1/4, uguale ad una funzione [9] f di θ_i, $\dot{\theta}_i$, u_i, v_i, che è limitata in $[0, h)$, e osservato che l'ultimo termine è, sempre in $[0, h)$, maggiorato da $\varepsilon^2 N(\varepsilon t)$ ($N(\varepsilon t) \geq 0$), nella parte comune ai due intervalli $[0, h)$ e $[0, L/\varepsilon]$, si può scrivere:

$$|u_1(t) - u_{10}| \leq \varepsilon\,|f(t) - f(0)| + \varepsilon^2 \int_0^t N(\varepsilon t)\,dt \leq \tag{18}$$

$$\leq \varepsilon\,|f(t) - f(0)| + \varepsilon \int_0^L N(\tau)\,d\tau \leq M_1\,\varepsilon$$

dove M_1 è un numero positivo. In modo analogo si ha:

$$|u_2(t) - u_{20}| \leq M_2\,\varepsilon \quad ; \quad |v_i(t) - v_{i_0}| \leq R_i\,\varepsilon\,, \qquad i = 1, 2. \tag{19}$$

ove M_2, R_1 e R_2 sono numeri positivi.

Ora, scelto ε in modo che sia:

$$M_i\,\varepsilon < \eta \quad , \quad R_i\,\varepsilon < \eta\,, \qquad i = 1, 2 \tag{20}$$

con il ragionamento della [1] si prova che $h \geq L/\varepsilon$ cioè, in tutto l'intervallo $[0, L/\varepsilon]$, con un errore di ordine inferiore a η, o, se si vuole, dell'ordine di ε, le u_i e v_i ($i = 1, 2$) possono ritenersi costanti valendo, in questo intervallo, le (18) e (19).

Allora, per le (8) e (9), e con un errore dell'ordine di ε, si può scrivere:

$$Q_i = \frac{u_{i_0}}{\sqrt{\omega_i}} \operatorname{sen} \int_0^t \omega_i(\tau)\,dt + \frac{v_{i_0}}{\sqrt{\omega_i}} \cos \int_0^t \omega_i(\tau)\,dt\,, \qquad i = 1, 2. \tag{21}$$

Ora, posto ($\mathfrak{J}_{10}$, $\mathfrak{J}_{20}$, γ_1, γ_2 costanti):

$$u_{i_0} = \sqrt{2\,\mathfrak{J}_{i_0}} \cos\gamma_i \quad , \quad v_{i_0} = \sqrt{2\,\mathfrak{J}_{i_0}} \operatorname{sen}\gamma_i\,, \qquad i = 1, 2 \tag{22}$$

(9) Per brevità scriveremo: $f(\theta, \dot{\theta}, u, v) = f(t)$.

dalle (21), (10) e (11) si ha:

$$(23)\qquad Q_i = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{J}_{i_0}}{\omega_i}}\,\text{sen}\left(\int_0^t \omega_i(\tau)\,\mathrm{d}t + \gamma_i\right)\ ;\ \dot{Q}_i = \sqrt{2\,\mathfrak{J}_{i_0}\,\omega_i}\,\cos\left(\int_0^t \omega_i(\tau)\,\mathrm{d}t + \gamma_i\right),\qquad i = 1\,,2.$$

La validità delle formule ora trovate potrebbe estendersi all'intervallo $[0,\infty)$ con le considerazioni e le ipotesi di [1], 4, ma su ciò non insistiamo. Piuttosto, sempre conforme alla Nota citata, osserviamo che i valori delle Q_i e $\dot{Q}_i$ $(i = 1\,,2)$ dipendono solo da $\mathfrak{L}_2$ e non da $\mathfrak{L}_0$ e $\mathfrak{L}_1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BOSCHI PETTINI, *Integrazione di alcune equazioni della Meccanica mediante gli invarianti adiabatici*, « Bollettino U.M.I. » (4), 5, 301–314 (1972).

[2] G. AYMERICH, *Sopra le equazioni dinamiche di un sistema a due gradi di libertà*, « Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari », *8*, 131–145 (1938); G. AYMERICH, *Trasformazione non esattamente adiabatica e integrazione approssimata di un sistema canonico a n gradi di libertà*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *12*, 51–61 (1941).

[3] L. CESARI, *Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations*, Springer–Berlin 1963, *8*, 4.