Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Matilde Pasqua

Alcune soluzioni a simmetria cilindrica della equazione relativistica di Navier-Stokes. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 127–132.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_127_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Fisica matematica. — *Alcune soluzioni a simmetria cilindrica della equazione relativistica di Navier–Stokes* (*). Nota I (**) di MATILDE PASQUA, presentata dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — We determine and discuss the exact stationary solutions of the relativistic Navier–Stokes equations for a viscous fluid dragged by two coaxial cylindres moving uniformly parallel to the axis.

1. INTRODUZIONE

Nell'ambito della relatività ristretta, ci proponiamo di trovare soluzioni esatte dell'estensione relativistica della equazione di Navier–Stokes per un fluido viscoso compreso fra due pareti cilindriche coassiali, cui si impone di traslare con velocità costante parallelamente al comune asse oppure di ruotare uniformemente rispetto ad esso. Supporremo che il fluido sia comprimibile e conduttore di calore e ricercheremo le soluzioni per le quali un conveniente flusso termico assicuri condizioni di completa stazionarietà.

In questa prima Nota prendiamo in esame moti di puro scorrimento parallelamente all'asse dei cilindri. Note le velocità di traslazione dei due cilindri, le tre equazioni indipendenti cui il sistema relativistico di Navier–Stokes si riduce tenuto conto della simmetria cilindrica, consentono, nelle supposte condizioni di stazionarietà, la determinazione univoca del campo di velocità. Restano ancora disponibili due relazioni che, completate con un'equazione di stato e con la legge di conduzione del calore, rendono determinata anche la distribuzione delle grandezze termodinamiche.

L'attendibilità dei risultati conseguiti riguardo alla distribuzione della velocità è confermata da un duplice controllo:

1) al limite non relativistico essa si riduce alla corrispondente distribuzione classica;

2) al tendere ad infinito dei raggi dei due cilindri, la loro distanza rimanendo costante, il campo di velocità si riduce alla soluzione dell'equazione relativistica di Navier–Stokes per un fluido trascinato da due superfici piane parallele [2].

2. IPOTESI E CONVENZIONI

Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ due superfici cilindriche coassiali indefinite e di raggi r_1 ed r_2 $(r_1 < r_2)$. In un riferimento inerziale rispetto al quale $\mathcal{C}_1$ si trova in quiete, a $\mathcal{C}_2$ si impone di muoversi con velocità costante parallela all'asse. (L'ipotesi

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1972.

che $\mathcal{C}_1$ abbia velocità nulla non è restrittiva perchè a questa situazione ci si può sempre ricondurre con una opportuna trasformazione di Lorentz). Scegliamo coordinate spaziali cilindriche $(r, z, \theta) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ con l'asse z sovrapposto all'asse dei cilindri e poniamo $x^4 = ct$; la metrica spaziotemporale sarà allora:

$$ds^2 \equiv g_{ik}\, dx^i\, dx^k = dr^2 + dz^2 + r^2\, d\theta^2 - c^2\, dt^2 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Supponiamo che lo spazio compreso tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sia riempito da un fluido viscoso $\mathcal{F}$ aderente alle pareti. Adottiamo le equazioni di moto per un fluido viscoso postulate da Eckart [1]

$$\nabla_i\, W^{ij} = 0 \tag{1}$$

dove W^{ij} è il tensore energia impulso avente la forma

$$\begin{aligned} W^{ij} &= wu^i u^j + ps^{ij} + \frac{1}{c}(q^i u^j + q^j u^i) - p^{ij} \\ p^{ij} &\equiv \lambda c \left[s^{ik} s^{jl} (\partial_k u_l + \partial_l u_k) - \frac{2}{3} s^{ij} s^{kl} \partial_k u_l \right] \\ s^{ij} &\equiv g^{ij} + u^i u^j . \end{aligned} \tag{2}$$

Nelle precedenti espressioni si è indicato con $\boldsymbol{u} \equiv (u^i)$ il vettore unitario del genere tempo parallelo alla 4–velocità di $\mathcal{F}$, $(u^i u_i = -1)$, con w la densità propria di massa propria e con $\boldsymbol{q}$, p, λ e n rispettivamente il flusso di calore, la pressione, il coefficiente di viscosità e la densità numerica delle particelle di $\mathcal{F}$. Supporremo che la funzione di stato $p(n, w)$ sia nota e che λ possa considerarsi costante. Ricercheremo le soluzioni per le quali tutte le quantità sono indipendenti da z, θ e t, la parte spaziale di $\boldsymbol{q}$ è diretta radialmente e la velocità è ovunque parallela all'asse z, $(u^1 = u^3 = 0)$. Tenuto conto delle ipotesi fatte, l'equazione di continuità

$$\nabla_i\,(nu^i) = 0 \tag{3}$$

risulta identicamente soddisfatta.

3. Distribuzione di velocità

Tenuto conto delle ipotesi fatte, l'equazione (1) risulta identicamente soddisfatta per $j = 3$, mentre per $j = 1, 2$ e 4 dà rispettivamente:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\partial p}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{dW^{12}}{dr} = -\frac{1}{r} W^{12} \tag{5}$$

$$\frac{dW^{14}}{dr} = -\frac{1}{r} W^{14}. \tag{6}$$

Integrando le (5) e (6) si ha

$$W^{12} = \frac{c_1}{r}$$

$$W^{14} = \frac{c_2}{r},$$

con c_1 e c_2 costanti di integrazione. Esplicitando W^{12} e W^{14} mediante le (2), si ottiene:

$$\frac{1}{c}\, q^1\, u^2 = \lambda c\, [(1 + (u^2)^2)\, \partial_1 u_2 + u^2 u^4\, \partial_1 u_4] + \frac{c_1}{r} \tag{7}$$

$$\frac{1}{c}\, q^1\, u^4 = \lambda c\, [u^2 u^4\, \partial_1 u_2 + (-1 + (u^4)^2)\, \partial_1 u_4] + \frac{c_2}{r}\,. \tag{8}$$

Moltiplicando la (7) per u^4/u^2 e confrontandola poi con la (8) risulta

$$\begin{aligned} \frac{u^4}{u^2}\, [(1 + (u^2)^2)\, \partial_1 u_2 + u^2 u^4\, \partial_1 u_4] + \frac{k_1 u^4}{r u^2} = \\ = [u^2 u^4\, \partial_1 u_2 + (-1 + (u^4)^2)\, \partial_1 u_4] + \frac{k_2}{r}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

dove si è posto

$$k_1 = \frac{c_1}{\lambda c} \quad , \quad k_2 = \frac{c_2}{\lambda c}\,.$$

Tenuto conto della relazione $(u^2)^2 - (u^4)^2 = -1$, esprimiamo la (9) in funzione di u^2 che indicheremo semplicemente con u; ricordando inoltre che nelle ipotesi fatte tutte le grandezze sono funzioni della sola r, la (9) diventa

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{k_1}{r}\,(1 + u^2) - \frac{k_2}{r}\, u \sqrt{1 + u^2} = 0.$$

La soluzione $u(r)$ della (10) conterrà, oltre alle due costanti k_1 e k_2, una terza costante che deriva dall'integrazione della (10) stessa.

Due di queste costanti sono determinate dalla condizione che il fluido aderisca alle superfici dei due cilindri:

$$u(r_1) = 0 \qquad u(r_2) = \bar{u}. \tag{11}$$

La terza costante va messa in relazione con il flusso di calore attraverso la superficie del cilindro di raggio r_1; risulta infatti dalla (8), per $u^2 = 0$ e $u^4 = 1$, che

$$q(r_1) = \frac{\lambda c^2}{r_1}\, k_2\,.$$

La (10) si può integrare per separazione di variabili:

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{(1 + u^2)\left(k_1 - k_2 \dfrac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\right)} = -\int_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \ln \frac{r_1}{r}\,. \tag{12}$$

Confrontando la (12) con la relazione

$$\int_0^u \frac{du}{(1+u^2)\left(a+b\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)} = \int_0^y dy = y \tag{13}$$

che si ottiene in modo analogo dalla equazione di un fluido viscoso trascinato da due piani (cfr. [2] formula (22)), si è condotti alla soluzione:

$$u = \frac{\sqrt{1+\beta^2}\left(\operatorname{tg}\alpha\ln\frac{r_1}{r} + \beta - \beta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\ln\frac{r_1}{r}}\right)}{1-\beta\operatorname{tg}\alpha\ln\frac{r_1}{r}} \tag{14}$$

che si ottiene dalla soluzione della ([2], (22)) sostituendo ad y la quantità $\ln\frac{r_1}{r}$

$$\left(k_1 \equiv \alpha\sqrt{1+\beta^2} \qquad k_2 \equiv \alpha\beta\right).$$

Le due costanti α e β restano determinate dalle due condizioni $u(r_2) = \bar{u}$ e $q(r_1) = q^1$ e precisamente:

dalla (8) segue:

$$\alpha\beta = k_2 = \frac{r_1}{\lambda c^2}\, q^1 \tag{15}$$

e dalla (14)

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}\left(\operatorname{tg}\alpha\ln\frac{r_1}{r_2} + \beta - \beta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\ln\frac{r_1}{r_2}}\right)}{1-\beta\operatorname{tg}\alpha\ln\frac{r_1}{r_2}}\,. \tag{16}$$

4. Limite classico e comportamento asintotico

Per essere accettabile la soluzione trovata deve soddisfare ai seguenti requisiti:

a) al limite non relativistico ($c \to \infty$) la distribuzione di velocità deve ridursi alla corrispondente soluzione classica

$$v = \bar{v}\,\frac{\ln\frac{r_1}{r}}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\,, \tag{17}$$

con $v(r_1) = 0$, $v(r_2) = \bar{v}$ (cfr. Landau–Lifshitz, Fluid Mechanics, p. 58, Pergamon Press, 1958).

b) Se si fanno tendere i raggi r_1 ed r_2 ad infinito mantenendo costante la loro differenza, si deve riottenere la soluzione corrispondente ad un fluido relativistico trascinato da due piani [2].

Per verificare la condizione *a*) osserviamo che, per la (15) si ha

$$\lim_{c\to\infty} \alpha\beta = 0 \qquad \text{anzi più precisamente} \quad \lim_{c\to\infty} \beta = 0. \tag{18}$$

Infatti se fosse $\lim\limits_{c\to\infty} \alpha = 0$ avremmo $\lim\limits_{c\to\infty} \bar{u} = 0$ corrispondente al modello banale di un fluido in quiete. Ne segue che:

$$\lim_{c\to\infty} \bar{u} = \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{r_1}{r_2} \,. \tag{19}$$

Tenendo presente la relazione

$$u = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e le (18) e (19) si ottiene subito la (17).

Ci limitiamo a considerare la condizione *b*) nel caso in cui $k_2 = 0$:

$$u = \operatorname{tg} k_1 \ln \frac{r_1}{r} \quad , \quad k_1 = \frac{\operatorname{arctg} \bar{u}}{\ln \dfrac{r_1}{r_2}} \,. \tag{20}$$

Di fatto ciò non è restrittivo in quanto la più generale soluzione (16) si può ottenere dalla (20) mediante una trasformazione di Lorentz come nel caso piano.

Posto $\qquad r_1 = r_1 \quad , \quad r_2 = r_1 + l \quad , \quad r = r_1 + y$

$$\lim_{r_1\to\infty} \operatorname{arctg} u = \operatorname{arctg} \bar{u} \lim_{r_1\to\infty} \frac{\ln \dfrac{r_1}{r_1 + y}}{\ln \dfrac{r_1}{r_1 + l}} = \operatorname{arctg} \bar{u} \cdot \frac{y}{l}$$

e quindi

$$u = \operatorname{tg} ay \quad , \quad a = \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \bar{u} \tag{21}$$

che è esattamente la ([2], formula (23)).

5. DISTRIBUZIONE DELLE GRANDEZZE TERMODINAMICHE

Per poter determinare la distribuzione delle densità e il flusso termico è necessario sfruttare completamente le (1) (di cui si è usata finora una sola conseguenza scalare), ed inoltre fare uso di una legge di conduzione del calore:

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{F}\,(w \,, n \,, \partial_i w \,, \partial_i n \,, u^i, \partial_k u^i) \tag{22}$$

cioè di una legge di dipendenza del flusso calorifico dalle variabili w, n, u^i e dalle loro derivate. L'aggiunta di una tale equazione vettoriale realizza il pareggiamento tra equazioni ed incognite (fra le quali va ora compresa anche la temperatura).

Faremo uso della legge di conduzione del calore adottata da Eckart:

$$q^i = -ks^{ij}(\partial_j \theta + \partial_k u_j \cdot u^k), \tag{23}$$

che è la diretta traduzione 4-dimensionale della legge classica di Fourier (k conduttività termica, $\theta = \theta(n, w)$ temperatura). La legge di conduzione (23) si può ritenere soddisfacente nelle nostre condizioni di stazionarietà (per una estensione, classica e relativistica, dell'equazione di Fourier, cfr. [4] e [5]).

A differenza di quanto accade per la distribuzione delle velocità, la distribuzione delle grandezze p, $\boldsymbol{q}$, n, w dipende da tutta la natura termodinamica del fluido.

Se però si ammette che il coefficiente di conducibilità termica k sia del tutto indipendente dalle variabili termodinamiche, la sola legge di conduzione basta a determinare la distribuzione della temperatura, supposta nota su una delle due pareti.

Tenendo conto delle condizioni di simmetria cilindrica e di stazionarietà, la (23) si riduce a

$$q^1 = -k \frac{d\theta}{dr} \cdot \tag{24}$$

D'altra parte dalla (7) si ha

$$q^1 u = \lambda c^2 \left[(1 + u^2) \frac{du}{dr} + u \sqrt{1 + u^2} \frac{d}{dr} \sqrt{1 + u^2} + \frac{k_1}{r}\right] \cdot$$

Sviluppando la quantità entro parentesi e tenendo conto di (24) risulta

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dr} + \frac{1}{u} \frac{k_1}{r} = -\frac{k}{\lambda c^2} \frac{d\theta}{dr} \cdot$$

Tenendo presente la (14), l'ultima equazione diventa

$$\frac{1}{r} \frac{\beta + \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{r_1}{r}}{1 - \beta \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{r_1}{r}} = -\frac{k}{\lambda c^2} \frac{d\theta}{dr},$$

le cui soluzioni sono

$$\theta = \bar{\theta} + \frac{\lambda c^2}{k} \ln \left|\cos\left(\alpha \ln \frac{r_1}{r} + \alpha\eta\right)\right|,$$

con $\operatorname{tg} \alpha\eta = \beta$. La presenza della costante di integrazione corrisponde alla possibilità di assegnare ad arbitrio la temperatura su una delle pareti cilindriche.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. ECKART, «Phys. Rev.», *58*, 919 (1940).
[2] V. CANTONI, «Meccanica», *6*, 75 (1971).
[3] L. D. LANDAU e E. M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1959.
[4] C. CATTANEO, «Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena», *3*, 83 (1948); «Compt. Rend.», *247*, 431 (1958).
[5] M. KRÁNYS, «Nuovo Cimento», *42B*, 51 (1966).