Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Bressan

Le equazioni gravitazionali di Einstein dedotte rigorosamente postulando qualche versione relativistica delle equazioni di Poisson. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 118–126.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_118_0>

Fisica matematica. — *Le equazioni gravitazionali di Einstein dedotte rigorosamente postulando qualche versione relativistica delle equazioni di Poisson* (*). Nota I (**) di ALDO BRESSAN, presentata dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — In Part I the form (P) of a natural relativistic analog for Poisson's equation is stated. Then (P) is specified into a postulate in a way that is physically acceptable but rather « ad hoc ». This postulate implies the Einstein gravitation equations (*a*).

In Part II the form (P) is specified into a postulate (Postulate 2) that is much less comprehensive and that can be justified again, but by an essential use of the Maxwell equations, conservation equations (which also are postulated) and a postulate (Postulate 3) which is surely true and has a possibility character, so that it would not be explicitly written according to common practice.

PARTE I

FORMA DI UN SOSTITUTO RELATIVISTICO DELL'EQUAZIONE DI POISSON. SUA PRIMA POSSIBILE PRECISAZIONE COME POSTULATO

N. 1. – *Introduzione alle parti I e II.*

La teoria della Relatività generale di Einstein non è l'unica teoria capace di tener conto dei fenomeni gravitazionali, oltre a quelli meccanici ed elettromagnetici, come del resto è provato dalla teoria unitaria dello stesso Einstein. Altre alternative alla Relatività generale, più o meno complete, sono state proposte da vari Autori (tra l'altro anche teorie della gravitazione con cronotopo pseudo-euclideo). Gli Autori delle suddette alternative sono spinti tra l'altro dal fatto che essi ritengono scarse le conferme sperimentali della Relatività generale (anche se sufficienti a farla preferire alla Fisica classica).

Nelle usuali trattazioni della Relatività generale si suppone il cronotopo Riemanniano, si fa l'ipotesi geodetica riguardante i moti dei fotoni e quelli di particelle di prova [N. 2], e poi si postulano le equazioni gravitazionali

$$A_{\alpha\beta} + \varkappa T_{\alpha\beta} = 0 \qquad (a)$$

ove $A_{\alpha\beta}$ è un certo tensore simmetrico e a divergenza $A_{\alpha\beta}{}^{/\beta}$ nulla costruito solo col tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ e le sue derivate prime e seconde, e ove il tensore $T_{\alpha\beta}$ è costruito anche con grandezze materiali o elettromagnetiche mentre $\varkappa$ è una costante universale. Si rende poi conto dell'accettabilità delle (*a*) in

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del gruppo del CNR per la Fisica Matematica per l'anno accademico 1971-72.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1972.

primo luogo osservando che essa implica le equazioni di conservazione

$$(b) \qquad T_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = 0$$

le quali, com'è già noto dalla Relatività ristretta, sono un accettabile sostituto dell'equazione del bilancio energetico e delle equazioni di Cauchy dei sistemi continui; in secondo luogo si mostra che le (*a*) implicano sostanzialmente un accettabile sostituto dell'equazione di Poisson. Tra l'altro Synge mostra ciò [6, p. 181] in un modo particolarmente rapido ed elegante confrontando i moti di un fluido pulverulento (in assenza di azioni elettromagnetiche) compatibili con la Fisica classica, con quelli compatibili con la Relatività generale.

Un noto teorema di Cartan assicura che nel cosiddetto caso non–cosmologico il suaccennato tensore $A_{\alpha\beta}$ (detto da alcuni di Levi Civita) è l'unico tensore simmetrico avente le suddette proprietà (tra cui la $A_{\alpha\beta}{}^{/\beta} \equiv 0$). Questo teorema è un notevole passo verso una risposta positiva, per così dire, al problema se sia necessario usare le equazioni gravitazionali (*a*), una volta fatta l'ipotesi geodetica, o no.

Una ragionevole risposta positiva al detto problema consiste appunto nel mostrare che sotto certe ipotesi di base (quali quella geodetica), e certe ipotesi di semplicità (quali quella di Cartan escludente a priori la considerazione delle derivate di $g_{\alpha\beta}$ d'ordine > 2) la (*a*) è l'unica equazione capace di tener conto dei fenomeni gravitazionali, o almeno che una tale equazione deve appartenere ad una certa classe (ristretta).

Che ipotesi di semplicità siano necessarie è ovvio [1]. Una risposta in senso positivo al suddetto problema si può migliorare indebolendo tali ipotesi e, specialmente, indebolendo le ipotesi di base. In questo lavoro mi propongo di dare un contributo alla tesi di una ragionevole necessità della (*a*) sotto l'ipotesi geodetica, nel modo seguente. Mentre di solito, oltre alle equazioni di Maxwell, si postula la (*a*) (o con Cartan un'equazione del tipo della (*a*)) da cui seguono (*b*) e l'equazione di Poisson, qui oltre all'ipotesi geodetica postulo le equazioni di Maxwell, la (*b*) e una condizione traducente direttamente l'equazione di Poisson nel cronotopo, prendendo a questo scopo spunti dalla sopra menzionata trattazione del Synge in [6].

Nella prima parte di questo lavoro postulo il suaccennato sostituto relativistico dell'equazione di Poisson in un modo che matematicamente è completamente determinato, che fisicamente è accettabile, e che è adatto alla deduzione della (*a*) senza neppur fare uso degli altri postulati, cosicché tale sostituto implica, tramite (*a*), le (*b*). Questo modo di introdurre la relatività generale tramite un diretto sostituto relativistico delle equazioni di Poisson, è rapido ma ha carattere « ad hoc », in armonia con la nota indipendenza dell'analogo classico delle (*b*) dall'equazione di Poisson; cioè i dettagli del suaccennato

(1) Per esempio, se si ammette che nell'espressione di $T_{\alpha\beta}$ possano intervenire le derivate rispetto alle coordinate x^α dei campi e induzioni elettriche e magnetiche, allora possiamo fare (in infiniti modi) un'aggiunta $\Delta T_{\alpha\beta}$ a $T_{\alpha\beta}$ la quale modifichi (*a*) ma non (*b*) – v. (34) e (35) in [2].

sostituto relativistico dell'equazione di Poisson non sono giustificabili direttamente (nemmeno usando il principio di equivalenza massa–energia) in quanto dipendono dalle equazioni di conservazione.

Nella seconda parte del presente lavoro introduco le (b) e un sostituto delle equazioni di Poisson mediante due postulati relativistici indipendenti. Più precisamente, del detto sostituto postulo la forma precisandolo matematicamente solo per corpi pulverulenti in assenza di campo elettromagnetico. Da un lato è facile giustificare questo postulato in modo diretto e spontaneo; dall'altro esso permette di dedurre le (a) mediante un uso essenziale delle (b) e delle equazioni di Maxwell. A rigore è essenziale pure l'uso di un certo postulato di possibilità (Postulato 3, N. 6) che per completezza scrivo esplicitamente non ostante di solito ammissioni di tal genere vengano sottintese.

I ragionamenti usati sono in parte simili a quelli su cui si basa un teorema di unicità del tensore elettromagnetico riferentesi anche al caso di corpi polarizzabili e dimostrato in [2] (2).

Mi sembra che gli scopi del presente lavoro possano esser resi più chiari considerando la seguente questione.

Ammessa l'ipotesi geodetica [N. 2], non è possibile postulare, oltre alle equazioni di Maxwell, la (b) e un sostituto (relativistico) dell'equazione di Poisson (in una forma equivalente ad un'equazione) del tipo

$$(a') \qquad A'_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu} + \varkappa' \, T'_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu} = 0$$

ove ν ha un certo valore ≥ 0, $A'_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}$ è costruito solo con la metrica e sue derivate d'ordine $\leq n$ (magari con $n = 2$), $T'_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}$ include pure grandezze materiali o elettromagnetiche, ma (a') non implica (b)? In particolare non potrebbe realizzarsi un'equazione quale la (a') per $\nu = 2$ e senza che sussista l'identità matematica $A'^{\;/\beta}_{\alpha\beta} \equiv 0$ o un'identità simile?

In sostanza nella Parte II si dà una risposta negativa alla precedente doppia questione, sotto ipotesi che mi sembrano ragionevoli e conformi ad un punto di vista generale. Con ciò mi sono proposto di portare un contributo ai fondamenti della Relatività generale, il quale possa riuscire di qualche utilità per chi voglia tentare la costruzione di qualche alternativa alla Relatività generale, anche se i risultati di questo lavoro sono a favore di un alto grado di necessità delle equazioni gravitazionali (a), una volta ammessa l'ipotesi geodetica [N. 2].

N. 2. – *Introduzione della metrica Einsteiniana. Riferimenti localmente naturali e analoghi classici.*

Ammettiamo di saper individuare i punti eventi del cronotopo S_4 della Relatività generale, e di conoscerne la topologia e i riferimenti (o sistemi di coordinate) regolari. Un elemento lineare dl di S_4 è detto del *genere luce*, *tempo*,

(2) Nel vuoto lo stesso teorema di unicità era stato dimostrato in [5] con procedimenti di altro tipo.

o *spazio* a seconda che appartiene alla possibile traiettoria di un fotone, a quella di una particella materiale, oppure a nessuna di tali traiettorie (3). Si può dire che $g_{\alpha\beta}$ è *un tensore fondamentale Einsteiniano* o che

$$ds^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, \cdots, 3) \tag{1}$$

è una *metrica Einsteiniana* se valgono le seguenti tre condizioni:

a) $g_{\alpha\beta}$ è un tensore doppio, simmetrico ed ovunque riducibile, con opportuna scelta del riferimento regolare (x), alla forma (4)

$$g_{i\alpha} = \delta_{i\alpha} \quad , \quad g_{0\alpha} = -\delta_{0\alpha} . \tag{2}$$

b) È $ds^2 \gtreqless 0$ lungo l'elemento lineare dl di S_4 a seconda che dl è del genere tempo, luce, o spazio.

c) Sono geodetiche di S_4 i possibili moti di una particella di prova (5).

POSTULATO I. – *Esiste una metrica Einsteiniana* ds^2.

Si dimostra che la suddetta metrica è determinata a meno di una costante di proporzionalità.

Un riferimento (x) si dice *localmente naturale* nel punto evento $\mathcal{E}$ se ivi riesce

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \quad , \quad g_{rs} = \delta_{rs} \quad , \quad g_{\alpha\sigma} = \delta_{0\sigma} \qquad \left(f_{,\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right). \tag{3}$$

Tali riferimenti sono caratterizzati, tra quelli localmente pseudo–euclidei – cf. (2) –, come i riferimenti rispetto ai quali è necessariamente nulla l'*accelerazione locale* $d^2 x^r/(dx^0)^2$ – cf. note (3) e (4) – di una qualunque particella di prova.

Consideriamo ora, in Fisica classica una terna cartesiana $\mathcal{T} \equiv (0, x^1, x^2, x^3)$ a priori mobile comunque. Sia $\underline{\mathcal{A}} = \text{grad}\, \Phi$ la forza Newtoniana d'attrazione universale per unità di massa. Allora

$$\mathcal{A}_{r,s} = \Phi_{,rs} = \mathcal{A}_{s,r} . \tag{4}$$

Indichiamo con ω_τ la velocità angolare della $\mathcal{T}$ e con $\boldsymbol{a}_P^{(\tau)}$ l'accelerazione del generico punto P solidale con essa. Se nel punto evento $\mathcal{E} = (P, t)$ riesce $\omega_\tau = 0$ e $\boldsymbol{a}_P^{(\tau)} = \underline{\mathcal{A}}$, dirò che in $\mathcal{E}$ la $\mathcal{T}$ è (*localmente*) *naturale* (oppure che essa

(3) Se dl appartiene ad una regione di S_4 occupata da materia, si ritiene di poter riconoscere il genere del dl con un'esperienza ideale praticando una piccolissima cavità attorno al dl.

(4) Gli indici greci si pensano come varianti da 0 a 3, quelli latini da 1 a 3. Si sottintendono sommatorie secondo la convenzione di Einstein.

(5) Per particella di prova $\bar{P}$ intendo qui un elemento materiale isotropo, puntiforme, libero da vincoli, elettricamente scarico e non polarizzabile, cosicché $\bar{P}$ è soggetto alla sola azione Newtoniana di attrazione universale.

non ruota e gravita liberamente). La stessa cosa dirò di un qualunque riferimento spazio–temporale includente la $\mathcal{T}$.

La condizione $\boldsymbol{a}_{\mathrm{P}}^{(\tau)} - \underline{\mathcal{A}} = 0 = \omega_\tau$ (in $\mathcal{S}$) è necessaria e sufficiente affinché in $\mathcal{S}$ sia necessariamente nulla l'accelerazione $\mathrm{d}^2x^r/\mathrm{d}t^2$ rispetto alla $\mathcal{T}$, di una qualunque particella di prova (liberamente gravitante).

Si conclude che i riferimenti localmente naturali della Relatività generale posson considerarsi come gli analoghi relativistici (locali) dei (considerati) riferimenti classici che localmente non ruotano e gravitano liberamente.

N. 3. – *Forma di un naturale sostituto relativistico dell'equazione di Poisson.*

Consideriamo in Fisica classica un corpo continuo $\mathcal{C}$ in condizioni generiche e un fluido ideale $\mathcal{F}$ (pulverulento e liberamente gravitante) cioè un fluido non materiale $\mathcal{F}$ mobile anche in regioni occupate da $\mathcal{C}$ e tale che ogni suo elemento (puntiforme) P* abbia sempre l'accelerazione $\underline{\mathcal{A}}$ rispetto agli spazi inerziali. Dunque $\mathcal{F}$ non influisce sul campo gravitazionale attuale, ma ne risente in quanto si muove come un fluido privo di coesione (pulverulento).

Detta $v_r = v_r(x^a, t)$ l'espressione Euleriana della velocità di $\mathcal{F}$ rispetto alla $\mathcal{T}$ [N. 2], supposto in x^a (ossia in $\mathcal{S}$)

$$\omega_\tau = 0 \qquad (\text{onde } \boldsymbol{a}_{\mathrm{P}}^{(\tau)} = \boldsymbol{a}_0^{(\tau)} + \dot{\omega}_\tau \wedge \mathrm{OP}), \tag{5}$$

e dette $a_r^{(\tau)}$ le componenti di $\boldsymbol{a}_{\mathrm{P}}^{(\tau)}$ nella $\mathcal{T}$, si ha (6)

$$\frac{\partial}{\partial t} v_r + v_{r,i}\, v^i = \mathcal{A}_r - a_r^{(\tau)} \quad , \quad a_{(r,s)}^{(\tau)} = 0 \tag{6}$$

in quanto $(6)_1$, vale per la nota espressione euleriana dell'accelerazione, per l'ipotesi che $\mathcal{F}$ graviti liberamente e per $(5)_1$; $(6)_2$ segue da $(5)_2$. Si può allora dimostrare che (7)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_{(r,s)} + v_{(r,i}\, v^i{}_{,s)} = \mathcal{A}_{r,s}\,. \tag{7}$$

Consideriamo ora il corpo $\mathcal{C}$ in Relatività generale e supponiamo che il suo tensore energetico totale $\mathrm{T}_{\alpha\beta}$ abbia la forma

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \mathrm{X}_{\alpha\beta} + \mathrm{E}_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + u_\alpha q_\beta = \mathrm{T}_{\beta\alpha}\,, \tag{8}$$

ove $c^{-2}\rho$ è la massa a riposo per unità di volume proprio, $\mathrm{X}_{\alpha\beta}$ il tensore (spaziale) degli sforzi, cq_α il vettore spaziale di corrente termica e $\mathrm{E}_{\alpha\beta}$ il tensore

(6) Uso le seguenti convenzioni: $2\,\mathrm{T}_{(\alpha\beta)} = \mathrm{T}_{\alpha\beta} + \mathrm{T}_{\beta\alpha}$, $2\,\mathrm{T}_{[\alpha\beta]} = \mathrm{T}_{\alpha\beta} - \mathrm{T}_{\beta\alpha}$.

(7) Per comodità del lettore osservo esplicitamente che da $(6)_1$ segue per derivazione

$$\mathcal{A}_{r,s} - a_{r,s}^{(\tau)} = \frac{\partial}{\partial t} v_{r,s} + v_{r,is} v^i + v_{r,i}\, v^i{}_{,s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_{r,s} + v_{r,i} v^i{}_{,s} \tag{a}$$

onde per $(6)_2$ e (4) vale (7).

In [6, p. 181] si considera $\mathcal{C}$ stesso pulverulento, e sostanziamente si deduce la (7) sul caso particolare $\dot{\omega}_\tau = 0$ dalla (6) pensando v_r come atto di moto di $\mathcal{C}$.

dell'energia elettromagnetica, per esempio quello usato in [4]. Com'è noto $E_{\alpha\beta}$ è determinato, per polarizzazioni non nulle, solo a meno dello scambio di termini con $\rho u_\alpha u_\beta$, $X_{\alpha\beta}$, e se si vuole anche con $2q_{(\alpha} u_{\beta)}$ [N. 4].

Trasportiamo ora alla Relatività generale le precedenti considerazioni sul fluido ideale $\mathfrak{F}$. A tale scopo dobbiamo ritenere che ogni elemento P* di $\mathfrak{F}$ si muova secondo una geodetica di S_4. Allora, denotando con $\gamma^\alpha = \gamma^\alpha(x)$ il campo della 4-velocità di $\mathfrak{F}$ e con una sbarretta obliqua la derivata covariante, abbiamo

$$(9) \qquad \gamma^\alpha{}_{/\beta}\gamma^\beta = 0 \quad , \quad \gamma^\alpha\gamma_\alpha = -1 .$$

Di qui si deduce (8)

$$(10) \qquad \frac{D}{Ds}\gamma_{\alpha/\beta} + \gamma_{\alpha/\rho}\gamma^\rho{}_{/\beta} = \gamma^\rho R_{\rho\alpha\beta\sigma}\gamma^\sigma = \gamma^\rho R_{\rho\beta\alpha\sigma}\gamma^\sigma .$$

Si noti che in un riferimento $(x)_\gamma$ che localmente sia naturale e solidale ad $\mathfrak{F}$, il 1° membro di (7) è l'analogo classico di quello di $(10)_1$ moltiplicato per c^2, cosicché per (4) possiamo scrivere

$$(11) \qquad \Phi_{,rs} \simeq c^2 R_{0rs0} \qquad (\gamma^0 = 1 \ , \ \gamma^r = 0) .$$

Tra l'altro di qui appare che $(10)_2$ è l'analogo relativistico della proprietà di simmetria (4), valida per $\omega_\tau = 0$ (e $\boldsymbol{a}^\tau_P = \mathfrak{A}$) e compatibile con la condizione $\dot{\omega}_\tau \neq 0$.

In Fisica classica l'equazione di Poisson

$$(12) \qquad \Phi_{,r}{}^{r} + 4\pi h\mu = 0 \qquad (h = \text{costante di Cavendish}),$$

ove μ è la densità (di massa) equivale per (7) e (4) alla validità di

$$(13) \qquad \frac{d}{dt}v^r{}_{,r} + v^r{}_{,i}\, v^i{}_{,r} = -4\pi h\mu$$

(in ogni terna $\mathfrak{T}$ con $\omega_\tau = 0$, potendo essere $\dot{\omega}_\tau \neq 0$, e) in corrispondenza ad ogni fluido ideale $\mathfrak{F}$ (del tipo considerato). Allora la (13) vale in particolare nel punto evento $\mathfrak{E}$ per ogni scelta di $\mathfrak{T}$ verificante le

$$(14) \qquad \omega_\tau = 0 \quad , \quad \boldsymbol{a}^\tau_P = \mathfrak{A} \qquad \text{in} \quad \mathfrak{E} = (P\,, t) .$$

(8) In [6, pp. 181-82] sostanzialmente si deduce (10) da (9) pensando γ^α come campo della 4-velocità del corpo $\mathfrak{C}$ stesso supposto pulverulento ($T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta$) e verificante le equazioni gravitazionali. Per comodità del lettore ricordo che

$$(b) \qquad \frac{D}{Ds}\gamma_{\alpha/\beta} = \gamma_{\alpha/\beta\sigma}\gamma^\sigma = \gamma_{\alpha/\sigma\beta}\gamma^\sigma + \gamma^\rho R_{\rho\alpha\beta\sigma}\gamma^\sigma .$$

Inoltre $(9)_1$ implica $\gamma_{\alpha/\sigma\beta}\gamma^\sigma = -\gamma_{\alpha/\sigma}\gamma^\sigma{}_{/\beta}$. Segue $(10)_1$.

La $(10)_2$ segue dalle $R_{\rho\alpha\beta\sigma} = R_{\beta\sigma\rho\alpha} = R_{\sigma\beta\alpha\rho}$.

L'analogo relativistico di un tale riferimento è un riferimento naturale $(x)_\gamma$ localmente solidale con $\mathcal{F}$ $(\gamma^0 = 1)$ inoltre, a meno del fattore c^2 i primi membri di $(10)_1$ e (13) sono analoghi. Allora il naturale analogo relativistico di (13) ha la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\gamma^\rho{}_{/\rho} + \gamma^\rho{}_{/\sigma}\,\gamma^\sigma{}_{/\rho} = -\,\frac{4\pi h}{c^2}\,\mu' \tag{15}$$

ove μ' è una quantità estremamente prossima a μ e da determinarsi opportunamente, come ci proponiamo di fare al N. 4 e nella Parte II. Dunque un sostituto relativistico dell'equazione (12) di Poisson è offerto dalla validità di (15) per ogni fluido ideale (relativistico) $\mathcal{F}$ del tipo considerato. Per (10) ciò equivale alla condizione

$$\gamma^\rho\,\mathrm{R}_{\rho\sigma}\,\gamma^\sigma = 4\pi h c^{-2}\,\mu'\gamma^\rho\,\gamma_\rho \qquad \textit{per ogni } \gamma^\rho \textit{ temporale.} \tag{16}$$

Va osservato che fisicamente μ' è definito solo per $\gamma^\rho\,\gamma_\rho = -1$. Però possiamo pensare di aver prolungato la definizione di μ' per γ^α vettore temporale qualunque, sostituendo l'argomento γ^α con $(-\gamma^\rho\,\gamma_\rho)^{-1/2}\,\gamma^\alpha$.

Non mi sembra inutile sottolineare che in Fisica classica [in Relatività] un fluido ideale $\mathcal{F}$ del tipo considerato, e quindi caratterizzato dal campo $v_r = v_r(t\,,x^\alpha)$, $[\gamma^\alpha = \gamma^\alpha(x)]$, rappresenta i risultati di possibili esperienze in quanto, fissato comunque il punto evento $\mathcal{E}$ (e praticata una piccolissima cavità attorno ad $\mathcal{E}$ se in $\mathcal{E}$ c'è materia), in $\mathcal{E}$ un particella di prova dotata della velocità v_r [della 4–velocità γ^ρ] ha l'accelerazione $\partial v_r/\partial t + v_{r,s}\,v^s$ [l'accelerazione intrinseca $\gamma^\rho{}_{/\sigma}\gamma^\sigma$].

N. 4. – *Primo sostituto relativistico delle equazioni di Poisson. Sua equivalenza alle equazioni gravitazionali nel caso generale.*

Le equazioni di Maxwell si scrivono

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathrm{F}_{\beta\gamma/\delta} = 0 \quad , \quad f^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = \mathrm{J}^\alpha\,, \tag{17}$$

ove $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ sono i noti tensori elettromagnetici costruiti con i campi e le induzioni elettromagnetiche, e J^α è la densità di 4–corrente elettrica.

Come si è detto, il tensore $\mathrm{E}_{\alpha\beta}$ figurante in (8) è determinato, entro la materia polarizzata, solo a meno di scambi di termini con $\mathrm{X}_{\alpha\beta}$, $\rho u_\alpha\,u_\beta$ e volendo anche con $u_\alpha\,q_\beta + q_\alpha\,u_\beta$. Inoltre, per semplicità conviene supporre sin dall'inizio che $\mathrm{X}_{\alpha\beta}$ e $\mathrm{E}_{\alpha\beta}$ siano simmetrici. Allora possiamo ritenere $\mathrm{E}_{\alpha\beta}$ della forma

$$\mathrm{E}_{\alpha\beta} = -\,\mathrm{F}_{(\alpha\delta}\,f^\delta{}_{\beta)} + \frac{1}{4}\,\mathrm{F}_{\gamma\delta}\,f^{\delta\gamma}\,g_{\alpha\beta} + 2\,u_{(\alpha}\,\mathcal{E}_{\beta)} \tag{18}$$

ove $\mathcal{E}_\beta$ è un vettore costruito con $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$ e u_α, nullo nel vuoto, e se si vuole, addirittura nullo ovunque.

Da (18) segue $0 = E_\rho{}^\rho = E_r{}^r - E_{00}$ in $(x)_\gamma$ (rispetto al fluido $\mathfrak{F}$), onde la densità (relativa) W_γ d'energia elettromagnetica è

$$(19) \qquad W_\gamma = 2\, E_{\alpha\beta}\, \gamma^\alpha \gamma^\beta = (2\, E_{\alpha\beta} - E^\rho{}_\rho\, g_{\alpha\beta})\, \gamma^\alpha \gamma^\beta .$$

Nel vuoto ($F_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}$) si ha

$$(20) \qquad W_\gamma = 2\, \rho^{el}_\gamma = \rho^{el}_\gamma + 3\, p^{el}_\gamma \quad (\text{per } \rho = 0 \; ; \; 3\, p^{el}_\gamma = E_r{}^r = E_{00} = \rho^{el}_\gamma),$$

ove ρ^{el}_γ è la densità di energia elettromagnetica e p^{el}_γ la pressione elettromagnetica rispetto all'osservatore γ^α.

Un primo modo di precisare μ' nella (16), rapido ma alquanto « ad hoc » (privo di giustificazione diretta), è offerto dalla ammissione

$$(21) \qquad c^2 \mu' = B_{\alpha\beta}\, \gamma^\alpha \gamma^\beta \qquad \text{con} \qquad B_{\alpha\beta} = 2\, T_{\alpha\beta} - T_\rho{}^\rho g_{\alpha\beta} ,$$

che in base alla condizione (16) equivale alla $R_{\alpha\beta} = 8\pi h c^{-4} (2^{-1}\, T_\rho{}^\rho g_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta})$ e quindi alle equazioni gravitazionali

$$(22) \qquad A_{\alpha\beta} + \frac{8\pi h}{c^4}\, T_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{con} \quad A_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, R_\rho{}^\rho g_{\alpha\beta} .$$

Queste implicano le equazioni di conservazione (*b*) [N. 1] le quali dunque sono intimamente collegate con la precisazione (21) del sostituto relativistico (16) delle equazioni di Poisson. Ciò rende conto della non diretta giustificabilità di (21).

Naturalmente la (21) è fisicamente accettabile e ciò può riconoscersi direttamente in quanto per $(8)_1$, $(9)_2$ e (19) essa equivale a

$$(23) \qquad c^2 \mu' = \frac{2\rho}{1-\beta^2} - \rho + 2\, X_{\alpha\beta}\, \gamma^\alpha \gamma^\beta + X_\rho{}^\rho - \frac{4}{\sqrt{1-\beta^2}}\, q_\alpha \gamma^\alpha + W_\gamma$$

ove β è la velocità Römeriana di $\mathcal{C}$ rispetto ad un osservatore solidale col fluido $\mathfrak{F}$ e W_γ è la densità di energia elettromagnetica pure rispetto ad $\mathfrak{F}$ (9), cosicché μ' risulta differire da $c^{-2}\rho$ (ossia dalla densità classica μ) solo per termini dell'ordine di c^{-2}.

Per (20) l'espressione (23) di μ' è compatibile con l'interpretazione relativistica di μ' come densità di massa materiale ed elettromagnetica, rispetto all'osservatore γ^α (in accordo col principio di equivalenza massa–energia) solo in assenza di campo elettromagnetico, di sforzi, e di conduzione termica, e per $\gamma^\alpha = u^\alpha$ ($c^2 \mu' = \rho$). In particolare, per $(20)_1$ nel vuoto la (23) diviene

$$(24) \qquad c^2 \mu' = 2\, \rho^{el}_\gamma , \qquad \text{ossia} \quad c^2 \mu' = \rho^{el}_\gamma + 3\, p^{el}_\gamma .$$

(9) Nel riferimento pseudo–euclideo $(x)_\gamma$ per cui localmente è $\gamma^0 = 1$, si ha $\gamma_0 = -1$ e $\gamma_r = 0$, onde

$$(a) \qquad -\gamma_\rho u^\rho = dx^0/ds = (1-\beta^2)^{-1/2} \qquad \text{con} \quad \beta^2 = \sum_r \left(\frac{dx^r}{dx^0}\right)^2 .$$

Che sussista la $(24)_1$, apparentemente in contrasto col principio d'equivalenza massa–energia, è spiegato dalla sua equivalenza con la $(24)_2$ la quale è un analogo nel vuoto della forma assunta dalla (23) per $\gamma^\alpha = u^\alpha$:

$$c^2\mu' = \rho + 3p + (\rho_\gamma^{el} + 3p_\gamma^{el}) \qquad \text{ove} \quad 3p = X^\rho{}_\rho . \tag{25}$$

Di qui risulta che, secondo le equazioni gravitazionali, materia e campo elettromagnetico intervengono nell'equazione di Poisson in modo perfettamente analogo e che il suddetto apparente contrasto è dovuto al fatto che $\rho \gg 3p$ mentre $\rho_\gamma^{el} = 3p_\gamma^{el}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BRESSAN, *Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in Relatività generale*, « Riv. di Mat. Univ. Parma », *4*, 23 (1963).

[2] A. BRESSAN, *Qualche proprietà di unicità del tensore energetico del campo elettromagnetico*, « Rend. Circolo Mat. Palermo », (II) *15*, 147 (1965).

[3] A. BRESSAN, *Sui fluidi capaci di elettro–magneto–strizione dai punti di vista classico e relativistico*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », (IV) *74*, 318 (1966).

[4] A. BRESSAN, *Ancora sul teorema di Poynting*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », (VIII) *42*, 491 (1967).

[5] C. JANKIEWICZ, *Dimostrazione dell'unicità del tensore energia impulso del campo elettromagnetico nello spazio Riemanniano*. (In Russo sul « Bull. int; Acad. pol. Sci. »), « Serie Sci. Math. Astr. Phys. », *10*, 403 (1962).

[6] J. L. SYNGE, *Relativity the general theory*. North Holland, Amsterdam, 1960.