Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Udeschini Brinis

Sullo spinore energetico in uno spazio-tempo riemanniano

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **53** (1972), n.1-2, p. 104–117.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_53_1-2_104_0>

Fisica matematica. — *Sullo spinore energetico in uno spazio–tempo riemanniano.* Nota (*) di Elisa Udeschini Brinis, presentata (**) dal Socio B. Finzi.

Summary. — Having stated the behaviour of the covariant derivatives in respect of the variations caused by an infinitesimal coordinate transformation, we obtain a simple expression of the energy-momentum tensor for a field defined, in a riemannian space-time, by a second-rank antisymmetric tensor.

A field defined by a second-rank symmetric spinor and by his complex conjugate, in a riemannian space-time, is then considered and, by the invariance of the action for a general infinitesimal coordinate transformation and also for an infinitesimal local Lorentz transformation, the expression of the divergenceless energy-momentum spinor is deduced.

Einstein–Maxwell equations in spinor form are finally derived from a variational principle, when a source-free electromagnetic field is supposed in presence of the gravitational field.

In una teoria di campo ambientata nello spazio–tempo pseudoeuclideo della relatività ristretta, riferito a coordinate pseudocartesiane, le dieci leggi di conservazione indipendenti, espresse dall'annullarsi della divergenza del tensore energetico totale (conservazione dell'energia e della quantità di moto) e di quella del momento angolare totale, sono deducibili direttamente dall'invarianza dell'azione rispetto al gruppo delle trasformazioni generali di Lorentz infinitesime [1]. Così pure, nel caso di un campo spinoriale, le leggi di conservazione in forma spinoriale e l'espressione dello spinore energetico totale sono deducibili direttamente sfruttando l'invarianza dell'azione rispetto alle trasformazioni spinoriali subordinate nello spazio di spin dalle trasformazioni infinitesime di Lorentz.

Operando nel modo suddetto, ho dedotto in un precedente lavoro [2] l'espressione del tensore energetico totale per un campo bivettoriale (caratterizzato da un tensore doppio emisimmetrico) e dello spinore energetico totale per un campo caratterizzato da uno spinore doppio simmetrico, esaminando in particolare il campo elettromagnetico.

Se però si fanno ipotesi più generali e cioè si considerano campi ambientati in uno spazio–tempo riemanniano di cui si suppone nota la metrica, o anche, in particolare, pseudoeuclideo riferito a coordinate generali, dall'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni generali infinitesime di coordinate spazio–temporali, si può dedurre – come è noto – l'annullarsi della divergenza tensoriale del tensore energetico (metrico). (Cfr. ad esempio [3],

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le Applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria.

(**) Nella seduta del 16 giugno 1972.

[4] e [5]). Tale equazione non traduce necessariamente leggi di conservazione: ciò avviene subordinatamente all'esistenza di vettori di Killing [6].

Per un campo spinoriale, tenuto conto delle variazioni spinoriali connesse alla trasformazione infinitesima di coordinate, dalla suddetta invarianza e dall'invarianza rispetto a trasformazioni locali infinitesime di Lorentz, si può trarre l'annullarsi della divergenza spinoriale di uno spinore quadruplo che ha l'ufficio di spinore energetico.

In tale ordine di idee, opero in questa Nota, per uno spazio genericamente riemanniano.

Premetto alcune osservazioni che mi sembrano non prive di interesse, intese a precisare il comportamento delle derivate covarianti dei potenziali (derivate che è preferibile far comparire, in luogo di quelle ordinarie, nella espressione della densità lagrangiana) nei confronti delle variazioni subordinate da una trasformazione infinitesima di coordinate. Ciò permette, nel caso di campi bivettoriali, di ottenere l'espressione del tensore energetico metrico in forma particolarmente semplice.

Considero successivamente un campo spinoriale caratterizzato da uno spinore doppio simmetrico e, sfruttando l'invarianza dell'azione rispetto ad arbitrarie trasformazioni infinitesime di coordinate spazio–temporali, nulle al contorno della regione considerata, nonchè l'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni locali infinitesime di Lorentz, ammesse verificate le equazioni spinoriali di campo, stabilisco esplicitamente l'espressione dello spinore energetico, espressione che nel caso particolare di spazio–tempo pseudoeuclideo si identifica con quella dello spinore energetico totale.

L'impostazione nella V_4 riemanniana mi permette automaticamente di ottenere un altro risultato. Poichè, difatti, l'azione dipende dalle coordinate dei punti dello spazio–tempo non solo attraverso i potenziali del campo, ma anche attraverso lo spin–tensore fondamentale ed i coefficienti di connessione spinoriale, gli sviluppi di calcolo portano a determinare la derivata funzionale della lagrangiana rispetto allo spin–tensore fondamentale. La conoscenza di tale espressione consente, ponendosi non più nelle ipotesi di metrica supposta nota, ma considerando – nell'ambito della relatività generale – il campo in esame come interagente col campo gravitazionale, esternamente alle masse, di dedurre da un unico principio variazionale le equazioni spinoriali di entrambi tali campi.

Così, nel caso particolarmente significativo del campo elettromagnetico neutro, assumendo come densità lagrangiana la somma di quella puramente gravitazionale e di quella di puro campo elettromagnetico ed imponendo la stazionarietà dell'azione in corrispondenza a variazioni arbitrarie sia degli spinori potenziali elettromagnetici, sia dello spin–tensore fondamentale, le cui componenti fungono da potenziali gravitazionali, si ottengono le equazioni di Maxwell in forma spinoriale e le equazioni gravitazionali in forma spinoriale, nelle quali il campo elettromagnetico figura come sorgente, attraverso lo spinore energetico.

1. Premessa: variazione dei potenziali e derivazione covariante

Premettiamo alcune osservazioni sul mutuo comportamento fra variazione dei potenziali di un campo e derivazione covariante.

Nella trattazione dei campi fisici col metodo variazionale, occorre considerare diversi tipi di variazioni dei potenziali, secondo che si vogliano dedurre le equazioni di campo, oppure le identità legate a proprietà di invarianza.

Così, accanto alla variazione intrinseca dei potenziali (che non tocca le coordinate dei punti dello spazio in cui si opera) si è portati a considerare le variazioni indotte sui potenziali da un cambiamento di coordinate, distinguendo la variazione locale da quella sostanziale.

È ben noto il comportamento di tali variazioni nei confronti dell'operazione di derivazione ordinaria rispetto alle coordinate; esaminiamone qui esplicitamente il comportamento nei confronti della derivazione covariante.

In uno spazio–tempo costituito da una V_4 riemanniana, o anche semplicemente pseudo–euclidea riferita a coordinate generali x^α, sia:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha\,,\beta\cdots = 0\,,1\,,2\,,3) \tag{1–1}$$

la metrica che supponiamo nota e sia $\varphi_\alpha(x)$ un vettore funzione regolare delle coordinate x^α (1).

Indichiamo con $\tilde{\delta}\varphi_\alpha(x)$ una arbitraria variazione del vettore φ_α che non tocca le coordinate dei punti dello spazio–tempo (variazione intrinseca).

Essendo tale variazione permutabile con la derivazione ordinaria, si avrà anche (indicando rispettivamente con la virgola e con la barra le derivate ordinaria e tensoriale e con $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ i simboli di Christoffel di seconda specie):

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\alpha/\beta}) = \tilde{\delta}(\varphi_{\alpha,\beta} - \varphi_\rho\, \Gamma^\rho_{\alpha\beta}) = (\tilde{\delta}\varphi_\alpha)_{,\beta} - \tilde{\delta}\varphi_\rho\, \Gamma^\rho_{\alpha\beta} = (\tilde{\delta}\varphi_\alpha)_{/\beta}\,. \tag{1–2}$$

La variazione $\tilde{\delta}$, pertanto, è permutabile anche con la derivazione tensoriale.

Consideriamo una trasformazione infinitesima di coordinate:

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x) \tag{1–3}$$

con ξ^α infinitesimi arbitrari.

Questa subordina sul vettore φ_α una variazione locale (o variazione in valore):

$$\delta\varphi_\alpha \equiv \varphi'_\alpha(x') - \varphi_\alpha(x) = -\varphi_\rho\, \xi^\rho{}_{,\alpha} \tag{1–4}$$

e una variazione sostanziale (o variazione in forma):

$$\delta^*\varphi_\alpha \equiv \varphi'_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x) = \delta\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha,\rho}\, \xi^\rho. \tag{1–5}$$

(1) Ci riferiamo, per semplicità, ad un vettore, ma le considerazioni che seguono si estendono senza difficoltà a tensori di ordine n, a scalari ed anche – con le opportune modifiche – a spinori.

La variazione sostanziale δ^*, a differenza di quella locale δ, è permutabile con la derivazione ordinaria. Si osservi, però, che la δ^* non è permutabile con la derivazione tensoriale.

Si ha difatti:

$$(1\text{-}6)\qquad \delta^*(\varphi_{\alpha/\beta}) = (\delta^*\varphi_\alpha)_{,\beta} - \delta^*\varphi_\rho\,\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \varphi_\rho\,\delta^*\,\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = (\delta^*\varphi_\alpha)_{/\beta} - \varphi_\rho\,\delta^*\,\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\,.$$

Si consideri ora un campo fisico dipendente da un potenziale vettore $\varphi_\alpha(x)$ [1], ambientato nella varietà V_4 di metrica (1-1). Sia $\mathfrak{L}$ la densità lagrangiana ed A la corrispondente azione. Indichiamo poi con $\mathcal{L}$ la densità scalare, che chiameremo brevemente lagrangiana: $\mathcal{L} \equiv \mathfrak{L}\sqrt{-g}$, essendo g il determinante della metrica e lo scalare $\mathfrak{L}$ un invariante costruito col potenziale φ_α e con le sue derivate tensoriali prime $\varphi_{\alpha/\beta}$. Si abbia, cioè:

$$(1\text{-}7)\qquad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\varphi_\alpha\,,\,\varphi_{\alpha/\beta}\,,\,g^{\alpha\beta})\ ^{(2)}$$

ed:

$$(1\text{-}8)\qquad \mathrm{A} = \int_\tau \mathcal{L}\,\mathrm{d}x \equiv \int_\tau \mathfrak{L}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}x \equiv \int_\tau \mathfrak{L}\,\mathrm{d}\tau$$

(essendo $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3$ e τ una regione spazio-temporale).

Ovviamente, è sempre lecito ritenere:

$$(1\text{-}9)\qquad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\varphi_\alpha\,,\,\varphi_{\alpha,\beta}\,,\,g^{\alpha\beta}\,,\,g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}),$$

esplicitando la derivata tensoriale di φ_α ed i simboli di Christoffel.

Si sa che, imponendo la stazionarietà dell'azione A in corrispondenza a variazioni arbitrarie $\tilde{\delta}\varphi_\alpha$ del potenziale, nulle al contorno della regione τ, si deducono le equazioni di campo. Vorrei però notare esplicitamente che – proprio grazie alla permutabilità della variazione $\tilde{\delta}$ con la derivazione tensoriale, espressa dalla (1-2), ed al fatto che la variazione $\tilde{\delta}$ non tocca le $g^{\alpha\beta}$ – è possibile operare con i consueti sviluppi del calcolo delle variazioni sia sulla (1-7), sia sulla (1-9). Le equazioni di campo cui si perviene, nei due casi, risultano espresse nelle due diverse forme:

$$(1\text{-}10)\qquad \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi_{\alpha/\beta}}\right)_{/\beta} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi_\alpha} = 0$$

$$(1\text{-}11)\qquad \frac{\partial}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{\alpha,\beta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha} = 0$$

la prima delle quali *ha carattere tensoriale.*

(2) L'intervento delle $g^{\alpha\beta}$ nelle (1-7) è necessario per ottenere un invariante costruito col vettore φ_α e col tensore derivato $\varphi_{\alpha/\beta}$.

L'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni infinitesime di coordinate del tipo (1–3), con ξ^α arbitrari e nulli al contorno della regione τ, si traduce poi nell'identità (3):

$$\int_\tau \delta^* \mathcal{L}\, dx \equiv 0 \tag{1–12}$$

che, tenendo conto delle equazioni di campo, dà luogo ad una identità debole. Questa, operando sulla (1–9), si può ridurre a:

$$\int_\tau \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}, g^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma})}{\delta g^{\alpha\beta}}\, \delta^* g^{\alpha\beta}\, dx = 0 \tag{1–13}$$

$\left(\text{indicando con } \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}} \text{ la derivata funzionale}\right)$ mentre, operando sulla (1–7) e tenendo presente la non permutabilità della variazione sostanziale δ^* con la derivazione tensoriale, espressa dalla (1–6), assume la forma:

$$\int_\tau \left\{ \frac{\partial[\mathfrak{L}(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha/\beta}, g^{\alpha\beta})\sqrt{-g}]}{\partial g^{\alpha\beta}}\, \delta^* g^{\alpha\beta} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial \varphi_{\alpha/\beta}}\, \varphi_\rho\, \delta^* \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \right\} dx = 0\,. \tag{1–14}$$

2. Campi bivettoriali: tensore energetico metrico

Mostriamo ora la semplice espressione che compete al tensore energetico per un campo caratterizzato da un tensore doppio emisimmetrico $G_{\alpha\beta}(x)$. Sia $\mathfrak{L}$ la densità lagrangiana costruita con $G_{\alpha\beta}$ e siano Φ_α e Ψ_γ i due potenziali vettori da cui si può far dipendere il campo, mediante la relazione:

$$G_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\, \Psi_{\gamma/\delta} \qquad (\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \text{tensore di Ricci}) \tag{2–1}$$

valida anche nella generica V_4 riemanniana di metrica (1–1) [7], [8].

Dall'equazione variazionale $\tilde\delta A = 0$, per variazioni arbitrarie $\tilde\delta\Phi_\alpha$ e $\tilde\delta\Psi_\gamma$ nulle al contorno della regione τ, si ottengono le equazioni di campo, formalmente identiche a quelle stabilite nello spazio–tempo pseudo–euclideo e legate dalle stesse identità differenziali forti [9], [2].

L'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni infinitesime di coordinate nulle al contorno della regione τ, tenuto conto delle equazioni di campo,

(3) Per una generica trasformazione del tipo (1–3) si ha:

$$\delta A \equiv \int_\tau [\delta^* \mathcal{L} + (\mathcal{L}\xi^\nu)_{,\nu}]\, dx\,.$$

conduce all'identità debole (cfr. (1–14)):

$$(2\text{–}2)\qquad \int_\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\,\delta^* g^{\alpha\beta}\,dx - \int_\tau \left\{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_{\alpha\beta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_{\beta\alpha}}\right)\Phi_\rho\,\delta^*\Gamma^\rho_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_{\alpha\beta}}\,\Psi_\rho\,\delta^*\Gamma^\rho_{\gamma\delta}\right\} dx = 0$$

che si riduce semplicemente a:

$$(2\text{–}3)\qquad \int_\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\,\delta^* g^{\alpha\beta}\,dx = 0$$

essendo identicamente nullo il secondo integrale a primo membro della (2–2), per la saturazione dei due indici di simmetria dei simboli di Christoffel con due indici di emisimmetria.

Pertanto, nel caso di campi bivettoriali, si verifica che la derivata funzionale rispetto al tensore fondamentale $g^{\alpha\beta}$ della lagrangiana, espressa mediante i potenziali e le loro derivate ordinarie, si identifica con la derivata parziale rispetto a $g^{\alpha\beta}$ della lagrangiana stessa, espressa mediante i potenziali e le loro derivate tensoriali.

Dalla (2–3), poi, essendo $\delta^* g^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha/\beta} + \xi^{\beta/\alpha}$, segue:

$$(2\text{–}4)\qquad \int_\tau \left(\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}}\right)\xi^{\alpha/\beta}\sqrt{-g}\,dx = 0$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ξ^α:

$$(2\text{–}5)\qquad T_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = 0$$

con:

$$(2\text{–}6)\qquad T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} \equiv -2\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} + \mathfrak{L} g_{\alpha\beta}\,.$$

Il tensore energetico metrico $T_{\alpha\beta}$ (doppio, simmetrico) assume la semplice espressione (2–6).

Nel caso, di maggior interesse per le applicazioni, in cui $\mathfrak{L}$ sia funzione degli invarianti quadratici intrinseci di prima e seconda specie del tensore doppio $G_{\alpha\beta}$, si può costatare con calcoli diretti che il tensore energetico $T_{\alpha\beta}$ si identifica, nello spazio–tempo pseudo–euclideo, con il tensore energetico totale $E_{\alpha\beta}$:

$$(2\text{–}7)\qquad E_{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\beta\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\nu\beta}}\right)(\Phi_\alpha{}^{/\nu} - \Phi^\nu{}_{/\alpha}) + \varepsilon^{\rho\nu}{}_{\mu\beta}\,\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial G^{\rho\nu}}\,(\Psi_\alpha{}^{/\mu} - \Psi^\mu{}_{/\alpha}) + \mathfrak{L} g_{\alpha\beta}$$

deducibile direttamente dall'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni di Lorentz infinitesime [2].

Ciò si verifica, in particolare, per il campo elettromagnetico neutro: il tensore $T_{\alpha\beta}$ coincide, nello spazio–tempo pseudo–euclideo, con il tensore $E_{\alpha\beta}$ ottenuto dalla consueta densità lagrangiana $\mathfrak{L} = 1/4\, F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ (essendo $F_{\alpha\beta}$ il tensore elettromagnetico) [2], [6].

3. Campi spinoriali: spinore energetico

Sempre nello spazio–tempo (generalmente riemanniano) di metrica (1–1), un campo sia caratterizzato da uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} e dal suo complesso coniugato $\overline{\Phi}_{AB} \equiv \Phi_{\mathbf{AB}} (A, B, \cdots = 1, 2)$ (*).

Otterrò, in questo paragrafo, l'espressione dello spinore energetico a divergenza spinoriale nulla.

Introducendo lo spinore potenziale χ_{RS} dal quale si può far dipendere lo spinore Φ_{AB}, mediante la [10] (4):

$$\Phi_{AB} = \frac{1}{8} (\chi_{RA}/^{R}{}_{B} + \chi_{RB}/^{R}{}_{A}) \tag{3–1}$$

(relazione valida, come la (2–1), anche in una V_4 riemanniana), la densità lagrangiana $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Phi_{AB}, \Phi_{\mathbf{AB}})$ risulta funzione delle derivate covarianti del potenziale χ_{RS} e del complesso coniugato $\overline{\chi}_{\mathbf{RS}}$, oltre che dello spin–tensore fondamentale $\sigma^{\mu}{}_{R\mathbf{S}}$.

Le equazioni di campo:

$$\theta^{AB}/^{\mathbf{C}}{}_{A} = 0 \quad ; \quad \theta^{\mathbf{AB}}/_{\mathbf{A}}{}^{C} = 0 \tag{3–2}$$

$\left(\text{avendo posto, per brevità: } \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{AB}} + \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{BA}} \equiv \theta^{AB}\right)$ e le due identità forti che le legano:

$$\theta^{AB}/^{\mathbf{C}}{}_{A\mathbf{C}B} \equiv 0 \quad ; \quad \theta^{\mathbf{AB}}/_{\mathbf{A}}{}^{C}{}_{\mathbf{B}C} \equiv 0 \tag{3–3}$$

discendono dall'equazione variazionale $\tilde{\delta}A = 0$, per variazioni arbitrarie $\tilde{\delta}\chi_{RS}$, $\tilde{\delta}\overline{\chi}_{\mathbf{RS}}$ nulle al contorno della regione τ e dall'identità $\tilde{\delta}A \equiv 0$, per variazioni del tipo $\tilde{\delta}\chi_{RS} = \tilde{\delta}\gamma_{/RS}$ e complessa coniugata, con $\gamma(x)$ funzione complessa arbitraria (invarianza di gauge).

L'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni infinitesime di coordinate del tipo (1–3), con ξ^{α} arbitrari e nulli al contorno della regione τ, si traduce nell'identità:

$$\int_{\tau} \left\{ \frac{1}{8} \sqrt{-g} \left[\theta^{AB} \delta^{*} (\chi_{RA}/^{R}{}_{B}) + \theta^{\mathbf{AB}} \delta^{*} (\overline{\chi}_{\mathbf{RA}}/_{\mathbf{B}}{}^{\mathbf{R}}) \right] + \mathfrak{L} \delta^{*} \sqrt{-g} \right\} dx \equiv 0 \tag{3–4}$$

che, in virtù delle relazioni (5):

$$\delta^{*} (\chi_{RA/\mu}) = (\delta^{*} \chi_{RA})_{/\mu} - \chi_{LA} \, \delta^{*} \Gamma^{L}{}_{R\mu} - \chi_{RH} \, \delta^{*} \Gamma^{H}{}_{A\mu} \tag{3–5}$$

(*) Per ragioni tipografiche, gli indici in grassetto sostituiscono gli indici puntati.

(4) Lo spinore potenziale è definito a meno di una trasformazione di gauge: $\chi'_{RS} = \chi_{RS} + \gamma_{/RS}$, con $\gamma(x)$ funzione scalare complessa arbitraria, disponendo della quale si può imporre al potenziale la condizione di solenoidalità: $\chi_{RS}/^{RS} = 0$.

(5) La (3–5) è ottenibile con procedimento analogo alla (1–6). Per la (3–6), cfr. [11].

(ove $\Gamma^{\mathbf{L}}{}_{\mathbf{R}\mu}$, $\Gamma^{\mathrm{H}}{}_{\mathrm{A}\mu}$ sono i coefficienti di connessione spinoriale),

$$\delta^* \sqrt{-g} = -\sqrt{-g}\,\sigma_\mu{}^{\mathbf{RS}}\,\delta^*\,\sigma^\mu{}_{\mathbf{RS}} \tag{3-6}$$

e ammesse verificate le equazioni di campo (3-2), dà luogo all'identità debole:

$$\begin{aligned}\int_\tau \sqrt{-g}\Big\{ & \frac{1}{8}\,\theta^{\mathrm{AB}}\Big[\chi_{\mathbf{RA}/\mu}\,\delta^*\,\sigma^{\mu\mathbf{R}}{}_{\mathrm{B}} - (\chi_{\mathbf{LA}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathbf{L}}{}_{\mathbf{R}\mu} + \chi_{\mathbf{RH}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathrm{H}}{}_{\mathrm{A}\mu})\,\sigma^{\mu\mathbf{R}}{}_{\mathrm{B}}\Big] + \\ & + \frac{1}{8}\,\theta^{\mathbf{AB}}\Big[\bar\chi_{\mathbf{RA}/\mu}\,\delta^*\,\sigma^\mu{}_{\mathbf{B}}{}^{\mathrm{R}} - (\bar\chi_{\mathbf{HA}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathrm{H}}{}_{\mathrm{R}\mu} + \bar\chi_{\mathbf{RL}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathbf{L}}{}_{\mathbf{A}\mu})\,\sigma^\mu{}_{\mathbf{B}}{}^{\mathrm{R}}\Big] + \\ & - \mathfrak{L}\sigma_\mu{}^{\mathbf{RS}}\,\delta^*\sigma^\mu{}_{\mathbf{RS}}\Big\}\, dx = 0 .\end{aligned} \tag{3-7}$$

Per trasformare ulteriormente la (3-7) possiamo valerci dell' identità:

$$\chi_{\mathbf{LA}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathbf{L}}{}_{\mathbf{R}\mu} + \chi_{\mathbf{RH}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathrm{H}}{}_{\mathrm{A}\mu} = \chi_{\mathbf{KM}}\,\sigma_\rho{}^{\mathbf{KM}}\Big[(\delta^*\,\sigma^\rho{}_{\mathbf{RA}})_{/\mu} + \sigma^\nu{}_{\mathbf{RA}}\,\delta^*\,\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Big]. \tag{3-8}$$

Questa sussiste in conseguenza dell'annullarsi della derivata covariante dello spin-tensore fondamentale sia prima, sia dopo aver operato la variazione δ^*.

Si ha difatti:

$$\sigma^\rho{}_{\mathbf{RA}/\mu} \equiv \sigma^\rho{}_{\mathbf{RA},\mu} + \sigma^\nu{}_{\mathbf{RA}}\,\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \sigma^\rho{}_{\mathbf{LA}}\,\Gamma^{\mathbf{L}}{}_{\mathbf{R}\mu} - \sigma^\rho{}_{\mathbf{RH}}\,\Gamma^{\mathrm{H}}{}_{\mathrm{A}\mu} = 0 \tag{3-9}$$

ed anche, indicando con due barre la derivata covariante eseguita valendosi della connessione variata $\Gamma + \delta^*\,\Gamma$:

$$(\sigma^\rho{}_{\mathbf{RA}} + \delta^*\,\sigma^\rho{}_{\mathbf{RA}})_{//\mu} = 0 . \tag{3-10}$$

Dalle (3-9) e (3-10), a meno di infinitesimi rigorosamente trascurabili, si deduce:

$$(\delta^*\,\sigma^\rho{}_{\mathbf{RA}})_{/\mu} + \sigma^\nu{}_{\mathbf{RA}}\,\delta^*\,\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = \sigma^\rho{}_{\mathbf{LA}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathbf{L}}{}_{\mathbf{R}\mu} + \sigma^\rho{}_{\mathbf{RH}}\,\delta^*\,\Gamma^{\mathrm{H}}{}_{\mathrm{A}\mu} \tag{3-11}$$

da cui, saturando con $\chi_\rho \equiv \sigma_\rho{}^{\mathbf{KM}}\chi_{\mathbf{KM}}$, segue la (3-8).

Per le relazioni (3-8) e complessa coniugata, l' identità (3-7) si può scrivere:

$$\begin{aligned}& \int_\tau \frac{1}{8}\sqrt{-g}\,(\theta_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{S}}\,\chi^{\mathbf{RA}}{}_{/\mu} + \theta_{\mathbf{A}}{}^{\mathbf{R}}\,\bar\chi^{\mathbf{SA}}{}_{/\mu} - 8\,\mathfrak{L}\sigma_\mu{}^{\mathbf{RS}})\,\delta^*\,\sigma^\mu{}_{\mathbf{RS}}\, dx + \\ & - \int_\tau \frac{1}{8}\sqrt{-g}\,(\theta^{\mathrm{SB}}\,\chi_{\mathbf{KM}}\,\sigma^{\mu\mathbf{R}}{}_{\mathrm{B}} + \theta^{\mathbf{RB}}\,\bar\chi_{\mathbf{MK}}\,\sigma^\mu{}_{\mathbf{B}}{}^{\mathrm{S}})\,\sigma_\rho{}^{\mathbf{KM}}\,(\delta^*\,\sigma^\rho{}_{\mathbf{RS}})_{/\mu}\, dx + \\ & - \int_\tau \frac{1}{8}\sqrt{-g}\,(\theta^{\mathrm{SB}}\,\chi_{\mathbf{KM}}\,\sigma^{\mu\mathbf{R}}{}_{\mathrm{B}} + \theta^{\mathbf{RB}}\,\bar\chi_{\mathbf{MK}}\,\sigma^\mu{}_{\mathbf{B}}{}^{\mathrm{S}})\,\sigma_\rho{}^{\mathbf{KM}}\,\sigma^\nu{}_{\mathbf{RS}}\,\delta^*\,\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\, dx = 0 .\end{aligned} \tag{3-7'}$$

Il terzo integrale a primo membro non reca contributo, perchè la funzione integranda si annulla identicamente. Essendo, difatti [12]:

$$\sigma^{\mu\mathbf{R}}{}_{\mathrm{B}}\,\sigma^{\nu}{}_{\mathbf{RS}} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\varepsilon_{\mathrm{BS}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}^{\mu\nu}{}_{\mathrm{BS}}$$

(dove $\varepsilon_{\mathrm{BS}}$ è lo spinore doppio emisimmetrico fondamentale: $\varepsilon_{\mathrm{BS}} = \varepsilon^{\mathrm{BS}} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ e lo spin–tensore $\mathrm{S}^{\mu\nu}{}_{\mathrm{BS}}$ è così definito: $\mathrm{S}^{\mu\nu}{}_{\mathrm{BS}} = \sigma^{\mu\mathbf{C}}{}_{\mathrm{B}}\,\sigma^{\nu}{}_{\mathbf{CS}} - \sigma^{\nu\mathbf{C}}{}_{\mathrm{B}}\,\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{CS}}$), segue:

$$(3\text{–}12)\qquad \theta^{\mathrm{SB}}\,\chi_{\mathbf{KM}}\,\sigma_{\rho}{}^{\mathbf{KM}}\,\sigma^{\mu\mathbf{R}}{}_{\mathrm{B}}\,\sigma^{\nu}{}_{\mathbf{RS}}\,\delta^{*}\,\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\theta^{\mathrm{SB}}\,\varepsilon_{\mathrm{BS}}\,\chi_{\mathbf{KM}}\,\sigma_{\rho}{}^{\mathbf{KM}}\,g^{\mu\nu}\,\delta^{*}\,\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\theta^{\mathrm{SB}}\,\chi_{\mathbf{KM}}\,\sigma_{\rho}{}^{\mathbf{KM}}\,\mathrm{S}^{\mu\nu}{}_{\mathrm{BS}}\,\delta^{*}\,\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \equiv 0$$

(rispettivamente per la saturazione dei due indici spinoriali S , B, di simmetria per θ^{SB} e di emisimmetria per $\varepsilon_{\mathrm{SB}}$, e dei due indici tensoriali μ , ν, di simmetria per $\delta^{*}\,\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ e di emisimmetria per $\mathrm{S}^{\mu\nu}{}_{\mathrm{BS}}$).

Analoga dimostrazione sussiste per l'annullarsi del termine complesso coniugato di (3–12).

Operando sul secondo integrale a secondo membro della (3–7′) con i consueti sviluppi (di integrazione per parti e trasformazione in integrale di ipersuperficie) e tenendo conto delle equazioni di campo (3–2), oltre che dell'annullarsi, sul contorno della regione τ, della variazione δ^{*}, la (3–7′) si riduce infine alla:

$$(3\text{–}7'')\qquad \int_{\tau} \frac{1}{8}\sqrt{-g}\,\big(\theta_{\mathrm{A}}{}^{\mathrm{S}}\,\chi^{\mathbf{RA}}{}_{/\mu} - \theta^{\mathrm{S}}{}_{\mathrm{A}}\,\chi_{\mathbf{KM}}{}^{/\mathbf{RA}}\,\sigma_{\mu}{}^{\mathbf{KM}} + \theta_{\mathbf{A}}{}^{\mathbf{R}}\,\bar{\chi}^{\mathrm{SA}}{}_{/\mu} - \theta^{\mathbf{R}}{}_{\mathbf{A}}\,\bar{\chi}_{\mathbf{MK}}{}^{/\mathrm{AS}}\,\sigma_{\mu}{}^{\mathbf{KM}} - 8\,\mathfrak{L}\sigma_{\mu}{}^{\mathbf{RS}}\big)\,\delta^{*}\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{RS}}\,dx \equiv \int_{\tau} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{RS}}}\,\delta^{*}\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{RS}}\,dx = 0$$

che pone in evidenza la derivata funzionale di $\mathcal{L}$ rispetto allo spin–tensore fondamentale.

Esplicitando la variazione sostanziale $\delta^{*}\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{RS}}$ indotta sullo spin–tensore fondamentale dal cambiamento di coordinate (1–3) [11]:

$$(3\text{–}13)\qquad \delta^{*}\,\sigma^{\mu\mathbf{RS}} = \sigma^{\beta\mathbf{RS}}\,\xi^{\mu}{}_{/\beta} + \big(\sigma^{\mu\mathbf{TS}}\,\Gamma^{\mathbf{R}}{}_{\mathbf{T}\rho} + \sigma^{\mu\mathbf{RV}}\,\Gamma^{\mathrm{S}}{}_{\mathrm{V}\rho}\big)\,\xi^{\rho}$$

ed introducendo lo spinore $\xi^{\mathbf{LH}}$ corrispondente al vettore ξ^{α}, la (3–7″) dà luogo alla:

$$(3\text{–}14)\qquad \int_{\tau} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma^{\mu\mathbf{RS}}}\,\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{LH}}\,\sigma^{\beta\mathbf{RS}}\,\xi^{\mathbf{LH}}{}_{/\beta}\,dx + \int_{\tau} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma^{\mu\mathbf{RS}}}\,\big(\sigma^{\mu\mathbf{TS}}\,\Gamma^{\mathbf{R}}{}_{\mathbf{T}\rho} + \sigma^{\mu\mathbf{RV}}\,\Gamma^{\mathrm{S}}{}_{\mathrm{V}\rho}\big)\,\xi^{\rho}\,dx = 0$$

dalla quale, trasformando il primo integrale con il consueto procedimento di integrazione per parti e tenendo conto dell'annullarsi di $\xi^{\mathbf{LH}}$ sul contorno della regione τ, si deduce:

$$(3\text{–}15)\qquad \int_{\tau} \sqrt{-g}\,\mathrm{T}_{\mathbf{RSLH}}{}^{/\mathbf{RS}}\,\xi^{\mathbf{LH}}\,dx + \int_{\tau} \sqrt{-g}\,\big(\mathrm{T}_{\mathbf{RST}}{}^{\mathrm{S}}\,\Gamma^{\mathbf{RT}}{}_{\rho} + \mathrm{T}_{\mathbf{RS}}{}^{\mathbf{R}}{}_{\mathrm{V}}\,\Gamma^{\mathrm{SV}}{}_{\rho}\big)\,\xi^{\rho}\,dx = 0$$

ove si è posto:

$$(3\text{-}16)\qquad T_{\mathbf{RSLH}} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma^{\mu\mathbf{RS}}}\,\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{LH}} \equiv \frac{1}{8}\,\theta_{\mathrm{AS}}(\chi_{\mathbf{LH}}/_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{A}} - \chi_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{A}}/_{\mathbf{LH}}) + \\ + \frac{1}{8}\,\theta_{\mathbf{AR}}(\overline{\chi}_{\mathbf{HL}}/^{\mathbf{A}}{}_{\mathrm{S}} - \overline{\chi}_{\mathbf{S}}{}^{\mathrm{A}}/_{\mathrm{LH}}) + \mathcal{L}\varepsilon_{\mathbf{RL}}\,\varepsilon_{\mathrm{SH}}\,.$$

Ma il secondo integrale a primo membro della (3–15) risulta nullo per l'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni infinitesime locali di Lorentz [13], [11].

Essendo difatti:

$$(3\text{-}17)\qquad \int_{\tau} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\sigma^{\mu\mathbf{RS}}}\,\delta\sigma^{\mu\mathbf{RS}}\,dx \equiv 0$$

in corrispondenza a variazioni dello spin–tensore fondamentale del tipo:

$$(3\text{-}18)\qquad \delta\sigma^{\mu\mathbf{RS}} = \sigma_{\nu}{}^{\mathbf{RS}}(S^{\mu\nu\mathrm{AB}}\,\eta_{\mathrm{AB}} + S^{\mu\nu\mathbf{AB}}\,\eta_{\mathbf{AB}})$$

(con η_{AB} spinore doppio simmetrico infinitesimo arbitrario), ricordando la (3–16) e tenendo conto delle relazioni:

$$\sigma_{\nu}{}^{\mathbf{RS}}\,S^{\mu\nu\mathrm{AB}} = \varepsilon^{\mathrm{AS}}\,\sigma^{\mu\mathbf{R}\mathrm{B}} + \varepsilon^{\mathrm{BS}}\,\sigma^{\mu\mathbf{R}\mathrm{A}}$$

e complessa coniugata, si ottengono, per l'arbitrarietà di η_{AB}, le identità (forti):

$$(3\text{-}19)\qquad T_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{A}\mathbf{R}\mathrm{B}} + T_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{B}\mathbf{R}\mathrm{A}} \equiv 0$$

e complessa coniugata.

Grazie alle (3–19), la funzione integranda del secondo integrale a primo membro della (3–15) si annulla identicamente (per la saturazione dei due indici $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ (S, V) di emisimmetria per $T_{\mathbf{RST}}{}^{\mathrm{S}}$ ($T_{\mathbf{RS}}{}^{\mathbf{R}}{}_{\mathrm{V}}$) e di simmetria per $\Gamma^{\mathbf{RT}}{}_{\rho}$ ($\Gamma^{\mathrm{SV}}{}_{\rho}$)).

La (3–15), pertanto, si riduce alla:

$$(3\text{-}15')\qquad \int_{\tau} \sqrt{-g}\,T_{\mathbf{RSLH}}/^{\mathbf{RS}}\,\xi^{\mathbf{LH}}\,dx = 0$$

e, per l'arbitrarietà delle $\xi^{\mathbf{LH}}$, comporta l'annullarsi della divergenza spinoriale dello spinore energetico $T_{\mathbf{RSLH}}$:

$$(3\text{-}20)\qquad T_{\mathbf{RSLH}}/^{\mathbf{RS}} = 0\,.$$

L'espressione (3–16) dello spinore energetico $T_{\mathbf{RSLH}}$ si può trasformare introducendo le parti hermitiana $\varphi_{\mathbf{RS}}$ ed anti–hermitiana $\psi_{\mathbf{RS}}$ dello spinore potenziale $\chi_{\mathbf{RS}}$:

$$(3\text{-}16')\qquad T_{\mathbf{RSLH}} \equiv \frac{1}{8}\,\theta_{\mathrm{AS}}(\varphi_{\mathbf{LH}}/_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{A}} - \varphi_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{A}}/_{\mathbf{LH}}) + \frac{1}{8}\,\theta_{\mathrm{AS}}(\psi_{\mathbf{LH}}/_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{A}} - \psi_{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{A}}/_{\mathbf{LH}}) + \\ + \frac{1}{8}\,\theta_{\mathbf{AR}}(\varphi_{\mathbf{LH}}/^{\mathbf{A}}{}_{\mathrm{S}} - \varphi^{\mathbf{A}}{}_{\mathrm{S}}/_{\mathbf{LH}}) + \frac{1}{8}\,\theta_{\mathbf{AR}}(\psi^{\mathbf{A}}{}_{\mathrm{S}}/_{\mathbf{LH}} - \psi_{\mathbf{LH}}/^{\mathbf{A}}{}_{\mathrm{S}}) + \mathcal{L}\varepsilon_{\mathbf{RL}}\,\varepsilon_{\mathrm{SH}}\,.$$

Osservando che:

$$\frac{1}{8}\,\theta_{AS}\,(\varphi_{LH}/_{\mathbf{R}}{}^{A} - \varphi_{\mathbf{R}}{}^{A}/_{LH}) = \frac{1}{8}\,\theta^{A}{}_{S}\,(\varphi_{\mathbf{RA/LH}} - \varphi_{\mathbf{RH/LA}} + \varphi_{\mathbf{RH/LA}} - \varphi_{\mathbf{LH/RA}}) =$$

$$= \frac{1}{8}\,\theta^{A}{}_{S}\,(\varepsilon_{AH}\,\varphi_{\mathbf{RE}}/_{\mathbf{L}}{}^{E} + \varepsilon_{\mathbf{RL}}\,\varphi_{\mathbf{TH}}/^{\mathbf{T}}{}_{A})\ {}^{(6)}$$

ed operando analogamente sugli altri termini della (3–16′), si ha:

$$\mathrm{T}_{\mathbf{RSLH}} = \frac{1}{8}\,\theta^{A}{}_{S}\left[\varepsilon_{AH}\,(\varphi_{\mathbf{RE}}/_{\mathbf{L}}{}^{E} + \psi_{\mathbf{RE}}/_{\mathbf{L}}{}^{E}) + \varepsilon_{\mathbf{RL}}\,(\varphi_{\mathbf{TH}}/^{\mathbf{T}}{}_{A} + \psi_{\mathbf{TH}}/^{\mathbf{T}}{}_{A})\right] +$$

$$+ \frac{1}{8}\,\theta^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{R}}\left[\varepsilon_{SH}\,(\varphi_{AE}/_{\mathbf{L}}{}^{E} - \psi_{AE}/_{\mathbf{L}}{}^{E}) + \varepsilon_{\mathbf{AL}}\,(\varphi_{\mathbf{TH}}/^{\mathbf{T}}{}_{S} - \psi_{\mathbf{TH}}/^{\mathbf{T}}{}_{S})\right] + \mathfrak{L}\varepsilon_{\mathbf{RL}}\,\varepsilon_{SH}\,.$$

Detti poi A_{AB} e B_{AB} i due spinori che rappresentano le parti di Φ_{AB} costruite rispettivamente, secondo la (3–1), con $\varphi_{\mathbf{RS}}$ e $\psi_{\mathbf{RS}}$ e supposta la solenoidalità dei potenziali, si ottiene:

$$\mathrm{T}_{\mathbf{RSLH}} = \frac{1}{2}\left[\theta_{HS}\,(A_{\mathbf{RL}} - B_{\mathbf{RL}}) + \theta^{A}{}_{S}\,\Phi_{AH}\,\varepsilon_{\mathbf{RL}} + \theta^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{R}}\,\Phi_{\mathbf{AL}}\,\varepsilon_{SH} + \right.$$
$$\left. + \theta_{\mathbf{LR}}\,(A_{SH} - B_{SH})\right] + \mathfrak{L}\varepsilon_{\mathbf{RL}}\,\varepsilon_{SH} \tag{3–21}$$

e cioè, a meno di un inessenziale fattore numerico 1/2 [7], la stessa espressione che compete allo spinore energetico totale $E_{\mathbf{RSLH}}$ ottenuto, nello spazio–tempo pseudoeuclideo riferito a coordinate pseudocartesiane, sfruttando l'invarianza dell'azione rispetto a trasformazioni infinitesime di Lorentz [2].

Pertanto lo spinore energetico $T_{\mathbf{RSLH}}$, nel caso particolare di spazio–tempo pseudoeuclideo, coincide con lo spinore energetico totale.

È evidente l'invarianza dello spinore energetico $T_{\mathbf{RSLH}}$ rispetto a trasformazioni di gauge (data l'invarianza rispetto ad esse sia di Φ_{AB} e $\Phi_{\mathbf{AB}}$, sia di $\mathfrak{L}$). Sussiste poi la proprietà di simmetria:

$$T_{\mathbf{RSLH}} = T_{\mathbf{LHRS}} \tag{3–22}$$

conseguenza, come già dimostrato altrove [2], delle relazioni (3–19) e coniugata.

Si noti, infine, che se si fa dipendere $\mathfrak{L}$ esplicitamente anche dal potenziale spinore, oltre che da Φ_{AB} e $\Phi_{\mathbf{AB}}$, si può pervenire allo spinore energetico con ovvia estensione del procedimento seguito.

(6) Posto, infatti:

$$\varphi_{\mathbf{RA/LH}} - \varphi_{\mathbf{RH/LA}} = \varepsilon_{AH}\,\Omega_{\mathbf{RL}}\,, \qquad \text{segue:}\quad \varphi_{\mathbf{RA}}/_{\mathbf{L}}{}^{A} = \Omega_{\mathbf{RL}}\,.$$

Analogamente si può ottenere il secondo addendo.

(7) Tale fattore è dovuto al fatto che, mentre qui si è adottato lo spin–tensore $\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{RS}}$ definito, in ciascun punto dello spazio–tempo dalle:

$$\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{AB}}\,\sigma^{\nu\mathbf{A}}{}_{C} + \sigma^{\nu}{}_{\mathbf{AB}}\,\sigma^{\mu\mathbf{A}}{}_{C} = g^{\mu\nu}\,\varepsilon_{BC}$$

lo spin–tensore $g^{\mu}{}_{\mathbf{RS}}$, usato nello spazio–tempo pseudoeuclideo, soddisfa alle stesse relazioni, ma con un fattore 2 a secondo membro.

Ad esempio, considerata la densità lagrangiana:

$$\mathfrak{L} = 2(\Phi_{AB}\,\Phi^{AB} + \Phi_{\mathbf{AB}}\,\Phi^{\mathbf{AB}}) - \frac{K^2}{4}\,\varphi_{\mathbf{RS}}\,\varphi^{\mathbf{RS}}$$

che contiene esplicitamente la parte hermitiana del potenziale spinore e dà luogo alle equazioni di Dirac per particelle libere di spin 1 [10] [12], si ottiene per lo spinore $T_{\mathbf{RS}LH}$ ancora l'espressione (3–21).

4. Deduzione variazionale delle equazioni di Einstein–Maxwell in forma spinoriale

Se lo spinore Φ_{AB} caratterizza il campo elettromagnetico ambientato nella V_4 riemanniana (in una regione vuota) e l'azione è quella di puro campo elettromagnetico [10], lo spinore energetico $T_{\mathbf{RS}LH}$ assume la forma (8):

$$T_{\mathbf{RS}LH} = 8(A_{\mathbf{RL}}\,A_{SH} - B_{\mathbf{RL}}\,B_{SH})\,. \tag{4–1}$$

Osservo ora che il modo col quale si è pervenuti allo spinore energetico $T_{\mathbf{RS}LH}$ consente, in maniera immediata, di dedurre *da un unico principio* di azione stazionaria sia le equazioni gravitazionali, sia le equazioni elettromagnetiche, in forma spinoriale, qualora, ponendosi nell'ambito della relatività generale, anzichè supporre nota la metrica dello spazio–tempo, si consideri il campo elettromagnetico (in assenza di cariche e correnti) interagente con il campo gravitazionale (esternamente alle masse e in assenza di altri campi (9)).

Le equazioni spinoriali del puro campo gravitazionale nelle regioni vuote [14]:

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi_{AB\mathbf{CD}} = 0 \\ &\lambda = 0 \end{aligned}\right. \tag{4–2}$$

(dove $\Phi_{AB\mathbf{CD}}$ è uno degli spinori di curvatura e $\lambda \equiv \Psi_{AB}{}^{AB} \equiv \Psi_{\mathbf{AB}}{}^{\mathbf{AB}}$ è il contratto del secondo spinore di curvatura $\Psi_{AB\mathbf{CD}}$) si possono trarre, come ho mostrato in un lavoro precedente [11], dal principio einsteiniano di azione stazionaria che fa capo alla lagrangiana $\mathfrak{L}_G \equiv R\sqrt{-g}$ (essendo $R = 4\lambda$ l'invariante scalare di curvatura), assumendo come variabili base atte a descrivere il campo gravitazionale le componenti dello spin–tensore fondamentale $\sigma^{\mu}{}_{\mathbf{R}S}$ ed operando su queste una variazione arbitraria che ne rispetti i valori al contorno, oltre a quelli delle derivate prime ordinarie.

(8) Se, ammettendo a priori l'equazione $\Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} - \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0$, e assumendo come equazione di campo la sola $\Phi^{AS}/^{\mathbf{R}}{}_{A} + \Phi^{\mathbf{AR}}/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0$ (o viceversa), si ritiene a priori hermitiano il potenziale: $\chi_{\mathbf{R}S} \equiv \varphi_{\mathbf{R}S}$ (o anti–hermitiano: $\chi_{\mathbf{R}S} \equiv \psi_{\mathbf{R}S}$), lo spinore energetico si riduce (a meno del segno) a: $T_{\mathbf{RS}LH} = 8\,\Phi_{\mathbf{RL}}\,\Phi_{SH}$.

(9) Anzichè ad un generico campo spinoriale del tipo considerato sopra, ci riferiamo qui al tipico caso di campo elettromagnetico.

Tenendo conto di questo risultato e del fatto che lo spinore energetico $T_{\mathbf{RSLH}}$ (4–1) non è altro che la derivata funzionale della lagrangiana elettromagnetica $\frac{\delta\mathcal{L}_E}{\delta\sigma^{\mu\mathbf{RS}}}$ tradotta in forma puramente spinoriale, segue facilmente che, assunta come lagrangiana la:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \varkappa\,\mathcal{L}_E \tag{4–3}$$

(con $\varkappa$ costante gravitazionale), dal principio di azione stazionaria $\tilde{\delta}A = 0$, in corrispondenza a variazioni arbitrarie sia dei potenziali gravitazionali $\sigma^\mu{}_{\mathbf{RS}}$, sia dei potenziali spinori elettromagnetici $\chi_{\mathbf{RS}}$ e complesso coniugato (che rispettino i valori al contorno di $\sigma^\mu{}_{\mathbf{RS}}$, $\sigma^\mu{}_{\mathbf{RS},\nu}$, $\chi_{\mathbf{RS}}$, $\overline{\chi}_{\mathbf{RS}}$) si traggono, accanto alle equazioni maxwelliane in forma spinoriale:

$$\begin{cases} \Phi^{AB}/^{\mathbf{R}}{}_A = 0 \\ \Phi^{\mathbf{AB}}/_{\mathbf{A}}{}^{R} = 0 \end{cases} \tag{4–4}$$

le equazioni gravitazionali complete in forma spinoriale:

$$\begin{cases} \Phi_{AB\mathbf{CD}} = 4\varkappa\,(A_{AB}\,A_{\mathbf{CD}} - B_{AB}\,B_{\mathbf{CD}}) \\ \lambda = 0\,. \end{cases} \tag{4–5}$$

Le (4–5), stabilite da Penrose [14] (10), mettono in evidenza l'influenza diretta dell'energia elettromagnetica su uno dei due spinori di curvatura dello spazio riemanniano della gravitazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. O. BARUT, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, The Macmillan Company, New York (1964).

[2] E. UDESCHINI BRINIS, *Tensore e spinore energetico di campi bivettoriali e spinoriali*, «Questi Rendic.», Nota I, *50* (4), 456 (1971); Nota II, *50* (5), 555 (1971).

[3] H. WEYL, *Space–Time–Matter*, Dover Publications, Inc. (1952).

[4] J. WEBER, *General Relativity and Gravitational Waves*, Interscience Publishers, Inc., New York (1961).

[5] L. LANDAU e E. LIFCHITZ, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, London (1962).

[6] C. CATTANEO, *Invarianza e conservazione*, «Rend. Sem. matem. e fisico di Milano», *39*, 196 (1969).

[7] B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, «Questi Rendic.», *12* (4) 378 (1952).

[8] A. M. PRATELLI, *Deduzione da un'unica azione delle equazioni indefinite e di contorno dei campi gravitazionale ed elettromagnetico*, «Annali Scuola Normale Sup. di Pisa», *12* (3), 203 (1958).

(10) Nella trattazione di Penrose, il potenziale elettromagnetico è supposto hermitiano (cfr. nota (8)) e pertanto la prima delle (4–5) ha la forma:

$$\Phi_{AB\mathbf{CD}} = 4\varkappa\,\Phi_{AB}\,\Phi_{\mathbf{CD}}\,.$$

[9] E. UDESCHINI BRINIS, *Campi fisici bivettoriali e loro genesi variazionale*, «Questi Rendic.», *39* (5), 269 (1965).

[10] E. UDESCHINI BRINIS, *Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana*, «Questi Rendic.», Nota I, *40* (4) 577 (1966); Nota II, *40* (5), 828 (1966).

[11] E. UDESCHINI BRINIS, *Deduzione variazionale delle equazioni gravitazionali spinoriali*, «Annali di matem.», *81*, 45 (1969).

[12] E. M. CORSON, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*, Blackie & Son Ltd., London and Glasgow (1955).

[13] P. G. BERGMANN, *Two-Component Spinors in General Relativity*, «Phys. Rev.», *107* (2), 624 (1956).

[14] R. PENROSE, *A Spinor Approach to General Relativity*, «Annals of Physics», *10*, 171 (1960.)