
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIAMBATTISTA SCARPI

**Sulla possibilità di un modello reologico intermedio
di tipo evolutivo**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.6, p. 912–917.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_912_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei fluidi. — *Sulla possibilità di un modello reologico intermedio di tipo evolutivo* (*). Nota di GIAMBATTISTA SCARPI, presentata (**) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — The notion of derivative of any real order is generalized to variable order in view of suggesting rheological models of viscoelastic liquids and solids.

1. — Per lo studio del comportamento reologico dei corpi viscoelastici sono stati di recente proposti modelli matematici cosiddetti « intermedi » [1], che fanno uso dell'algoritmo delle derivazioni di ordine non intero; mentre esistono alcuni tentativi di interpretazione a livello della fisica molecolare, intuitivamente essi sono basati sulla seguente osservazione: il legame fra il tensore degli sforzi T e quello delle deformazioni ϵ in un solido elastico è descritto dalla legge di Hooke (si prescinde da componenti isotrope eventuali)

$$(1) \quad T = E \cdot \epsilon$$

e in un liquido puramente viscoso dalla legge di Newton (limitatamente a un moto a filetti paralleli) (1)

$$(2) \quad T = \mu \frac{d\epsilon}{dt};$$

la (1) e la (2) possono essere entrambe scritte nella forma

$$(3) \quad T = \theta_\alpha \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha}$$

dove ad $\alpha = 0$ corrisponde il solido elastico, ad $\alpha = 1$ il liquido viscoso.

Se si immagina che α possa assumere valori intermedi fra 0 ed 1, il tipo di comportamento descritto dalla (3) sarà relativo ad un materiale « intermedio », viscoelastico.

Scopo di questa Nota è di estendere la legge (3) a materiali soggetti a modificazioni strutturali al passare del tempo (quali polimerizzazioni, cristallizzazioni, o altre degenerazioni), cioè al caso in cui l'indice α nella (3) sia a sua volta funzione del tempo.

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del gruppo nazionale per la fisica matematica e per le applicazioni della matematica alla fisica e all'ingegneria.

(**) Nella seduta del 20 giugno 1972.

(1) Il cosiddetto « simple shear flow ».

2. — Richiamiamo in breve la nozione matematica di derivata di ordine reale qualsiasi: data una funzione (o, più generalmente, una distribuzione) $f(t)$, si ha per definizione [2], [3], [4]

$$(4) \quad \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = f(t) * Y_{-\alpha}(t)$$

con

$$(5) \quad Y_{-\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} P f(t^{-\alpha-1}) \quad \text{se } \alpha \text{ non è intero positivo}$$

$$(5') \quad Y_{-\alpha}(t) = \delta^{(\alpha)}(t) \quad \text{se } \alpha \text{ è un intero positivo}$$

ove l'asterisco indica al solito il prodotto convolutorio, e $\delta(t)$ è la distribuzione di Dirac.

La (4) si riduce alla derivazione ordinaria se α è intero positivo; infatti se $\alpha = N$

$$\frac{d^N f}{dt^N} = f(t) * \delta^{(N)}(t) = \frac{d^N f}{dt^N}$$

e inoltre soddisfa la proprietà fondamentale

$$(6) \quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \left(\frac{d^\beta f}{dt^\beta} \right) = \frac{d^{\alpha+\beta} f}{dt^{\alpha+\beta}}.$$

Se α è intero negativo, $\alpha = -N$, la (4) vale l'integrale N -plo della $f(t)$.

Allora, ai fini del calcolo effettivo, dato α positivo non intero, se si pone

$$\alpha = N - \rho, \quad 0 < \rho < 1,$$

si ha

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{d^{N-\rho} f}{dt^{N-\rho}} = \frac{d^{-\rho}}{dt^{-\rho}} \left(\frac{d^N f}{dt^N} \right) = \frac{d^N f}{dt^N} * Y_\rho(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t \frac{d^N f(\tau)}{d\tau^N} (t-\tau)^{\rho-1} d\tau,$$

che in genere converge.

Le formule date si possono esprimere più semplicemente in termini di trasformate di Laplace. Posto che esista

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma_0,$$

definiamo la derivata di ordine α qualunque di $f(t)$:

$$(7) \quad \mathfrak{L} \left[\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \right] = s^\alpha \mathfrak{L}[f(t)] = s^\alpha F(s).$$

Vogliamo ora estendere la nozione di derivata di ordine α qualunque al caso in cui α sia funzione del tempo, $\alpha = \alpha(t)$, con le condizioni che se

$\alpha = \text{cost}$ tale definizione si riduca alla (4) (o alla (7)), e che continui a valere la (6).

Poniamo allora per definizione

$$(8) \quad \mathcal{L} \left[\frac{d^{\alpha(t)} f(t)}{dt^{\alpha(t)}} \right] = \mathcal{L} [f(t)] s^{\mathcal{L}[\alpha(t)]} = F(s) s^{\Lambda(s)}$$

cioè

$$(8') \quad \frac{d^{\alpha(t)} f(t)}{dt^{\alpha(t)}} = f(t) * \mathcal{L}^{-1} [s^{\Lambda(s)}]$$

con la condizione che $f(t)$ ed $\alpha(t)$ siano entrambe $\mathcal{L}$ -trasformabili ed essendo $\Lambda(s) = \mathcal{L}[\alpha(s)]$. Senza entrare nelle generalità del problema osserviamo che nelle applicazioni che faremo la funzione $\alpha(t)$ sarà limitata in $t \geq 0$, per cui $s^{\Lambda(s)}$ appartiene al campo delle $\mathcal{L}$ -trasformate. La (8), nel caso di α costante coincide con la (7), e inoltre

$$(9) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{d^{\alpha(t)}}{dt^{\alpha(t)}} \left[\frac{d^{\beta(t)} f(t)}{dt^{\beta(t)}} \right] \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d^{\alpha(t)}}{dt^{\alpha(t)}} \left[f(t) * \mathcal{L}^{-1} (s^{\mathcal{L}[\beta(s)]}) \right] \right\} =$$

$$= s^{\mathcal{L}[\beta(s)]} F(s) s^{\Lambda(s)} = F(s) s^{\mathcal{L}[\Lambda(s) + \beta(s)]} = \mathcal{L} \left[\frac{d^{\alpha(t) + \beta(t)} f(t)}{dt^{\alpha(t) + \beta(t)}} \right]$$

cioè sussiste la (6).

3. - Pensiamo ora ad un modello di mezzo continuo per cui il legame fra T ed ε sia

$$(10) \quad T = 2\theta(t) \frac{\partial^{\alpha(t)} \varepsilon}{\partial t^{\alpha(t)}}$$

cioè, posto $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} (v_{i;j} + v_{j;i})$, per la (6)

$$(11) \quad t_{ij} = \theta(t) \frac{\partial^{\alpha(t)-1}}{\partial t^{\alpha(t)-1}} (v_{i;j} + v_{j;i})$$

ove $0 \leq \alpha(t) \leq 1$.

Supponiamo di studiare il moto piano di un tale corpo, che sia limitato fra due piani paralleli distanti $2L$, con la condizione che non si abbia scorrimento alle pareti, e che il moto avvenga per filetti paralleli ⁽²⁾. Supposto il mezzo incompressibile, risulta $\text{div } v = 0$, e l'equazione del moto si può scrivere:

$$\text{div } T - \rho \frac{Dv}{Dt} = \gamma f(t)$$

(2) Cioè si tratta sempre di simple shear flow.

dove $\gamma f(t)$ indica le sollecitazioni esterne ($f(t)$ è numero puro); con le condizioni poste, il moto avviene solo in direzione y , si ha, detta x la direzione normale ai piani considerati, con $x = 0$ in mezzaria:

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x} (t_{xy}) - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma f(t)$$

e quindi, per la (11):

$$\theta(t) \frac{\partial^{\alpha(t)-1}}{\partial t^{\alpha(t)-1}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma f(t)$$

con la condizione $v(\pm L, t) = 0$. Per semplicità sia $\theta(t) = \theta = \text{costante}$ ⁽³⁾; trasformando rispetto a t , posto $\mathcal{L}[v(x, t)] = V(x, s)$:

$$(13) \quad \theta \frac{d^2 V}{dx^2} s^{s[A(s)-1/s]} - \rho s V = \gamma F(s).$$

La soluzione della (13) con le condizioni imposte per $x = \pm L$ è ovvia:

$$(14) \quad V(x, s) = g \frac{F(s)}{s} \left[\frac{\text{Ch} \left[\left(\frac{\rho}{\theta} s^{1-s(A(s)-1/s)} \right)^{1/2} x \right]}{\text{Ch} \left[\left(\frac{\rho}{\theta} s^{1-s(A(s)-1/s)} \right)^{1/2} L \right]} - 1 \right].$$

Supponiamo che risulti $f(t) = 1(t)$, cioè $F(s) = 1/s$: ci interessa determinare la soluzione di regime, cioè per $t \rightarrow \infty$; si ha allora

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) &= v_{\infty}(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s V(x, s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g}{s} \left[\frac{\text{Ch} \left[\left(\frac{\rho}{\theta} s^{1-s(A(s)-1/s)} \right)^{1/2} x \right]}{\text{Ch} \left[\left(\frac{\rho}{\theta} s^{1-s(A(s)-1/s)} \right)^{1/2} L \right]} - 1 \right] \end{aligned}$$

che dipende quindi da $A(s)$, cioè da $\alpha(t)$.

Esaminiamo il caso in cui α varia gradualmente da zero (stato solido) a 1 (liquido); allora risulta $\lim_{s \rightarrow \infty} s[A(s) - 1/s] = 0$, per cui si possono avere varie situazioni: se

$$(15) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s[A(s) - 1/s] \ln s = 0,$$

il corpo si comporta a regime come un liquido viscoso, con viscosità θ , e risulta

$$v_{\infty} = \frac{\gamma}{\theta} (x^2 - L^2),$$

(3) Il caso in cui è $\theta = \theta(t)$ non è insormontabile: si veda ad esempio [5].

che è la legge di Hagen-Poiseuille, per cui il comportamento a regime non dipende dal tipo di evoluzione seguita, purchè valga la (15); se

$$(16) \quad \lim_{s \rightarrow 0} s [A(s) - 1/s] \ln s = \lambda \neq 0, \quad \text{reale}$$

e $|\lambda| < \infty$, allora il corpo a regime si comporta ancora come un liquido viscoso, però di viscosità $\theta e^{-\lambda}$ e quindi il comportamento finale dipende parzialmente dal tipo di evoluzione; se invece

$$(17) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{s [A(s) - 1/s] \ln s\} = +\infty$$

si ha $v_\infty = 0$, cioè il corpo mantiene anche a regime il comportamento di solido elastico, indipendentemente dall'evoluzione seguita: intuitivamente ciò significa che $\alpha(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$ « troppo lentamente » perchè il carattere « liquido » possa giungere a prevalere. Il caso poi che il limite in studio risulti $-\infty$ non dà risultati fisicamente accettabili, perchè $|v_\infty| \rightarrow \infty$.

Osserviamo infine che quando si ha il comportamento a regime di tipo « liquido », il corpo può essere considerato come un « liquido viscoelastico » nel senso classico della teoria lineare della viscoelasticità [7], [8]: infatti si può ritenere la espressione $\theta s^{s[A(s)-1/s]}$ come $\mathcal{L}$ -trasformata della funzione di rilassamento $G(t)$ del materiale considerato; per essa risulta nei primi due casi visti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$$

e nel terzo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = l \neq 0;$$

è però

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t G(\tau) d\tau < \infty$$

soltanto nei primi due casi considerati ((15) e (16)), che dunque sono i soli a rappresentare effettivamente « liquidi viscoelastici ».

È ovvio che partendo da corpi per cui α varia da 1 (liquido) a zero (solido) si giungerà all'esame di situazioni analoghe a quelle viste, e a conclusioni simili: il comportamento a regime potrà essere di solido elastico, oppure di liquido viscoso, dipendentemente da $\alpha(t)$: da tener presente che in questo caso

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s [A(s) - 1/s] = -1,$$

per cui la discussione precedente ne risulterà modificata di conseguenza.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SMIT W. e DE VRIES H., *Rheological models containing fractional derivatives*, « Rheol. Acta », 9, 252-534 (1970).
- [2] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions*, Hermann, Parigi 1966.
- [3] RIESZ M., *L'integrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, « Acta Mathematica », 81, 1-223 (1948).
- [4] GELFAND I. M. e SHILOV G. E., *Generalized functions*, Academic Press, New York 1964.
- [5] SCARPI G., *Sopra il moto laminare di liquidi a viscosità variabile nel tempo*, « Atti Accademia delle Scienze di Bologna » in corso di stampa.
- [6] KAUFMAN H. e ROBERTS G. E., *Table of Laplace transforms*, Saunders, London 1966.
- [7] TRUESDELL C. e NOLL W., *The non linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik (G. Flügge ed.) 3 (3), Springer, Berlin 1965.
- [8] CHRISTENSEN R. M., *Theory of viscoelasticity*, Academic Press, New York 1971.