
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIANNANTONIO PEZZOLI

**Perturbazioni impulsive in bacini di profondità
limitata. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 52 (1972), n.6, p. 903–911.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_903_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_903_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Perturbazioni impulsive in bacini di profondità limitata.* Nota II di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — In the second part of this work, impulsive perturbations are applied to the study of a wave produced by a landslide falling in a closed basin.

The problem was solved in an approximate manner by providing an easily applicable formula which gives reliable numerical results.

In questa seconda Nota abbiamo preso in esame un caso di rilevante interesse tecnico, riguardante il moto in un canale a seguito dello spostamento, con legge assegnata, di un battente verticale.

Questo problema, già affrontato da G. Scarpi per uno spostamento istantaneo e risolto in modo approssimato, può essere studiato in modo più preciso per leggi di spostamento che configurino con maggiore accuratezza l'eventuale moto dell'acqua in un bacino, provocato da una frana.

Consideriamo un canale semiinfinito, a fondo orizzontale, limitato ad una estremità da una parete verticale; l'acqua in esso contenuta sia inizialmente in quiete: vogliamo determinare l'effetto provocato da uno spostamento orizzontale della parete verticale che limita il canale; in particolare verrà esaminata la forma che il pelo libero assume, partendo dalla posizione di quiete.

Lo schema matematico è sempre quello di moto piano irrotazionale di liquido perfetto, per cui esisterà un potenziale di velocità che verifica l'equazione di Laplace; ci limiteremo ad uno studio di prima approssimazione cioè supporremo ancora che valga sul pelo libero la condizione di Poisson: indichiamo ancora con φ il potenziale della velocità e con u e v le componenti della velocità secondo x ed y .

È più comodo in questo caso porre l'origine della y sul fondo del canale: varranno quindi sempre le condizioni rappresentate dalle formule della prima Nota (2), (3), (3') salvo lo scambio ovvio dei limiti $y = 0$ ed $y = h$; inoltre la posizione della parete verticale, all'origine delle x , in riposo al tempo $t = 0$, potrà ad esempio essere definita nel seguente modo:

$$(I) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 & (0 < t < \tau) \\ u = 0 & (t > \tau). \end{cases}$$

La parte rigida, che simula il movimento provocato da una frana, si sposta quindi con moto uniforme durante il tempo τ .

(*) Nella seduta dell'8 aprile 1972.

Consideriamo la funzione:

$$(2) \quad F(x, y, t) = \frac{A}{k} \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh} \sin kx \cos \sigma t - \\ - \sum_1^{\infty} \frac{A_p}{\lambda_p} e^{-\lambda_p x} \frac{\cos \lambda_p y}{\sin \lambda_p h} \cos \sigma t = F_1(x, y) \cos \sigma t$$

che come si verifica facilmente, soddisfa tutte le condizioni richieste, purchè risulti:

$$(3) \quad \sigma^2 = kg \operatorname{tgh} kh = -\lambda_p g \operatorname{tg} \lambda_p h.$$

I coefficienti A, A_p si determinano in modo che sia, sulla parete ($x = 0$), $\partial F / \partial x = B \cos \sigma t$, con $0 \leq y \leq h$; ciò è possibile perchè le funzioni $f_p(y) = \operatorname{ch} ky, \cos \lambda_p y$ formano un sistema ortogonale completo nell'intervallo $(0, h)$.

Dalla (2) abbiamo:

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = A \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh} \cos kx \cos \sigma t + \\ + \sum_1^{\infty} A_p e^{-\lambda_p x} \frac{\cos \lambda_p y}{\sin \lambda_p h} \cos \sigma t = \cos \sigma t \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}.$$

Si trova facilmente:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \operatorname{sh} kh \frac{\int_0^h \operatorname{ch} ky \, dy}{\int_0^h \operatorname{ch}^2 ky \, dy} \\ A_p = \sin \lambda_p h \frac{\int_0^h \cos \lambda_p y \, dy}{\int_0^h \cos^2 \lambda_p y \, dy} \end{array} \right.$$

cioè:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{2 \operatorname{sh}^2 z}{z + \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z} \\ A_p = \frac{2 \sin^2 z_p}{z_p + \sin z_p \cos z_p} \end{array} \right.$$

essendo:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = kh \\ z_p = \lambda_p h. \end{array} \right.$$

Se ora vogliamo trovare una funzione φ che soddisfi, oltre le (1), (2), (3') della prima Nota (soddisfatte dalla F) anche la (1), possiamo pensare

di applicare il teorema dell'integrale di Fourier a $\partial F/\partial x$, per cui avremo, indicando con $I(t)$ la funzione a gradino unitaria:

$$(8) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \cos \sigma (t - \alpha) [I(t) - I(t - \tau)] d\alpha \right]$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} d\sigma \int_0^{\tau} u_0 \cos \sigma (t - \alpha) d\alpha \right]$$

e che integrata una prima volta fornisce:

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{u_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial F_1}{\partial x} [\sin \sigma t - \sin \sigma (t - \tau)] \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Un'ulteriore integrazione sotto il segno rispetto ad x dà:

$$(11) \quad \varphi = \frac{u_0}{\pi} \int_0^{\infty} F_1 [\sin \sigma t - \sin \sigma (t - \tau)] \frac{d\sigma}{\sigma}$$

e corrispondentemente

$$(12) \quad \eta = \frac{u_0}{\pi g} \int_0^{\infty} \left[\frac{A}{h} \operatorname{ctgh} z \cdot \sin kx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\lambda_p} e^{-\lambda_p x} \operatorname{cotg} z_p \right] \cdot [\cos \sigma t - \cos \sigma (t - \tau)] d\sigma.$$

Di conseguenza η si può spezzare nella somma di due integrali e scrivere:

$$(13) \quad \frac{\pi g \eta}{u_0} = I - \sum_{p=1}^{\infty} I_p$$

dove è:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = h \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}{z + \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z} \frac{\sin z \xi}{z} [\cos \sigma t - \cos \sigma (t - \tau)] d\sigma \\ I_p = h \int_0^{\infty} \frac{2 \sin z_p \cos z_p}{z_p + \sin z_p \cos z_p} \frac{e^{-z_p \xi}}{z_p} [\cos \sigma t - \cos \sigma (t - \tau)] d\sigma \end{array} \right.$$

avendo posto $\frac{x}{h} = \xi$.

Ma è ancora per la (3) e (7):

$$(15) \quad \sigma = \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{z \operatorname{tgh} z} \quad , \quad d\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{z + \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}{\operatorname{ch}^2 z \sqrt{z \operatorname{tgh} z}} dz$$

per cui la prima delle (14) diviene:

$$(16) \quad I = \sqrt{gh} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\operatorname{tgh} z}{z}} \frac{\sin z\xi}{z} \left[\cos \left(\sqrt{z \operatorname{tgh} z} \sqrt{\frac{g}{h}} t \right) - \right. \\ \left. - \cos \left\{ \sqrt{z \operatorname{tgh} z} \sqrt{\frac{g}{h}} (t - \tau) \right\} \right] dz.$$

Riferendoci alla posizione approssimata (28) della prima Nota, ed avendo già visto, nella trattazione di integrali del tipo (16) che nell'intervallo $0 < z < 1/2$ la funzione $\sqrt{z \operatorname{tgh} z}$ si riduce a z , e quindi col metodo della fase stazionaria detti integrali non danno contributo, e nell'intervallo $1/2 < z < 2$ detto contributo è trascurabile, possiamo ridurci al solo intervallo $2 < z < \infty$, e posto $\sqrt{z \operatorname{tgh} z} \simeq \sqrt{z}$, si ha:

$$(17) \quad I = \sqrt{gh} \int_2^\infty \frac{\sin z\xi}{z^{3/2}} \left[\cos \sqrt{\frac{gz}{h}} t - \cos \sqrt{\frac{gz}{h}} (t - \tau) \right] dz.$$

Eseguiti i prodotti di seni per coseni ed eliminati ancora gli integrali che non forniscono contributo, per la (27) della prima parte si ottiene facilmente:

$$(18) \quad I = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{g}} x^{3/2} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{gt^2}{4x} \right)}{t^2} - \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{g}{4x} (t - \tau)^2 \right\}}{(t - \tau)^2} \right].$$

Questo integrale deve necessariamente essere assunto eguale a 0 se la variabile z esce dal campo di definizione della variabile stessa, vale a dire:

$$(19) \quad 2 < \frac{gt^2}{x} \cdot \frac{h}{x} < \infty.$$

Cerchiamo ora di valutare, sia pure in modo approssimato, I_p della (14''); ricordando il valore (3) di σ in funzione di λ_p e la 2ª delle (7), tenuto conto che $\sigma = f(z_p)$ e che z_p , per ogni ramo di σ varia fra $(2p-1)\frac{\pi}{2}$ e $p\pi$, la (14'') si scrive:

$$(20) \quad I_p = - \sqrt{gh} \int_{(2p-1)\frac{\pi}{2}}^{p\pi} \sqrt{-\operatorname{tg} z_p} \frac{e^{-z_p \xi}}{z_p^{3/2}} \left[\cos \left(\sqrt{-z_p \operatorname{tg} z_p} \sqrt{\frac{g}{h}} t \right) - \right. \\ \left. - \cos \left\{ \sqrt{-z_p \operatorname{tg} z_p} \sqrt{\frac{g}{h}} (t - \tau) \right\} \right] dz.$$

Con la trasformazione lineare

$$(21) \quad z_p = \frac{\pi}{4} (\psi - 1 + 4p)$$

l'integrale che compare in (20) viene ricondotto ad un altro integrale della forma

$$(22) \quad I_p = -\frac{\pi}{4} \sqrt{gh} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{-\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} (\psi - 1 + 4p)}{\frac{\pi}{4} (\psi - 1 + 4p)}} \frac{e^{-\frac{\pi}{4} (\psi - 1 + 4p)\xi}}{\frac{\pi}{4} (\psi - 1 + 4p)} f(\psi) d\psi$$

dove con $f(\psi)$ si è indicata la funzione trasformata secondo la (21), che compare nella (20) fra parentesi quadre.

Ricordiamo che per integrali del tipo (22) esistono moltissime formule di quadratura tipo Simpson, Newton-Cotes, ecc., che consentono una notevole precisione assumendo ascisse equidistanti ed un conveniente numero di suddivisioni dell'intervallo di integrazione.

È possibile però giungere ugualmente ad una elevata precisione con un numero di suddivisioni limitato, purchè le ascisse dei punti di suddivisione non siano equidistanti; i metodi che conducono a formule di quadratura di questo tipo sono detti metodi Gaussiani.

Per un integrale della forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

dove x è una variabile generica, si può usare la quadratura di Legendre-Gauss che porta a scrivere:

$$(23) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^m H_n f(x_n) + E$$

dove x_i è l' i -esimo zero di $P_m(x)$ (Polinomio di Legendre di ordine m), e dove

$$(24) \quad H_i = \frac{2}{m P_{m-1}(x_i) P'_m(x_i)}$$

L'errore E può essere maggiorato facilmente, dato che dalla teoria delle quadrature in oggetto risulta:

$$(25) \quad E = \frac{2^{2m+1} (m!)^4}{(2m+1) [(2m)!]^3} f^{(2m)}(\zeta) \quad , \quad (|\zeta| < 1)$$

Se assumiamo $m = 2$, più che sufficiente per i nostri scopi, la (23) diviene:

$$(26) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{135} f^{IV}(\zeta).$$

Trascurando quindi il termine d'errore possiamo usare la (26) per calcolare I_p , e limitarci semplicemente a $p = 1$, il cui integrale ha corrispondentemente un valore già molto piccolo per la presenza del fattore $e^{-\frac{\pi}{4}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}+3)\xi}$ fattore che diventa evanescente nei termini successivi.

Si ottiene a conti fatti:

$$(27) \quad I_p \simeq I_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{gh} \left[0,08 e^{-2,809 x/h} \left(\cos t \sqrt{\frac{g}{h}} - \cos \sqrt{\frac{g}{h}} (t - \tau) \right) + \right. \\ \left. + 0,453 e^{-1,902 x/h} \left(\cos 2,359 t \sqrt{\frac{g}{h}} - \cos 2,359 \sqrt{\frac{g}{h}} (t - \tau) \right) \right]$$

e quindi dalla (13):

$$(28) \quad \frac{\pi g \eta}{u_0} \simeq 4 \sqrt{\frac{\pi}{g}} x^{3/2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{gt^2}{4x}\right)}{t^2} - \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{g}{4x}(t-\tau)^2\right\}}{(t-\tau)^2} \right] - \\ - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{gh} \left[0,08 e^{-2,809 x/h} \left\{ \cos \sqrt{\frac{g}{h}} t - \cos \sqrt{\frac{g}{h}} (t - \tau) \right\} + \right. \\ \left. + 0,453 e^{-1,902 x/h} \left\{ \cos 2,359 \sqrt{\frac{g}{h}} t - \cos 2,359 \sqrt{\frac{g}{h}} (t - \tau) \right\} \right]$$

per cui, in definitiva, trascurando ancora il secondo termine fra parentesi quadre, assai piccolo in confronto al primo, si ottiene il valore di η :

$$(29) \quad \eta = u_0 \sqrt{\frac{x}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \frac{gt^2}{4x}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{gt^2}{4x}\right) - \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{gt^2}{4x}\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^2\right\}}{\left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^2} \right].$$

L'ultimo termine trascurato è l'unico che risente della profondità h , perchè nel primo non vi è traccia di questa grandezza; il suo effetto è tuttavia evanescente e conferma che le onde di impulso si comportano in pratica come onde di profondità illimitata.

La soluzione qui ottenuta, ovviamente approssimata, consente tuttavia di ottenere un risultato di un certo rilievo, risolvendo il problema corrispondente.

Interessa infatti sapere in un punto a distanza assegnata l dall'origine, quale sia l'eventuale massimo sovrizzo dell'onda dovuta ad un movimento franoso.

Occorrerà quindi conoscere il massimo di η in funzione del tempo, all'ascissa l ; il problema si può risolvere come segue: la condizione

$$(30) \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x=l} = 0$$

ci fornisce gli istanti dei massimi (e dei minimi) per assegnati valori di τ ed l . Procediamo in questo modo; posto

$$(31) \quad \frac{t}{\tau} = \alpha \quad , \quad \frac{g\tau^2}{4l} = \beta$$

dalla (29) si ricava il valore di η all'ascissa $x = l$ che indicheremo con η_l :

$$(32) \quad \eta_l = u_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\pi\alpha^2\beta} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha^2\beta\right) - \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4} - \alpha^2\beta\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2\right\}}{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2} \right].$$

La (30) equivale allora a scrivere:

$$(33) \quad \frac{\partial \eta_l}{\partial \alpha} = 0$$

che risolta rispetto ad α , dà per ogni valore di β , infinite radici di cui la prima, positiva, che è la maggiore, indica la presenza del primo massimo.

Ottenuto $\alpha(\beta)$ e sostituito nella (32), si può esprimere la massima sovrالعlevatione nella forma:

$$(34) \quad \eta_{l\max} = u_0 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot F(\beta).$$

Il calcolo numerico della soluzione della (33) (prima radice) e della valutazione successiva di $\alpha(\beta)$ e $F(\beta)$ sono state eseguite mediante calcolatore elettronico, ed il risultato finale è condensato nella Tabella I e nel grafico di fig. 1, che consentono un'immediata applicazione della (34).

TABELLA I

$\beta = \frac{g\tau^2}{4l}$	$\alpha = \frac{t}{\tau}$	F(β)
0	∞	0
0,001	59,3886	0,0196
0,5	3,1073	0,3433
1	2,3336	0,3692
2	1,8242	0,2592
3	1,8827	0,2631
5	1,5697	0,2975
7	1,5606	0,2707
10	1,3932	0,2580

Facciamo a titolo di esempio, per mezzo delle (32) e (34), una valutazione diretta del massimo sovralzo raggiungibile dall'acqua in prossimità della diga di sbarramento di un bacino artificiale ipotetico.

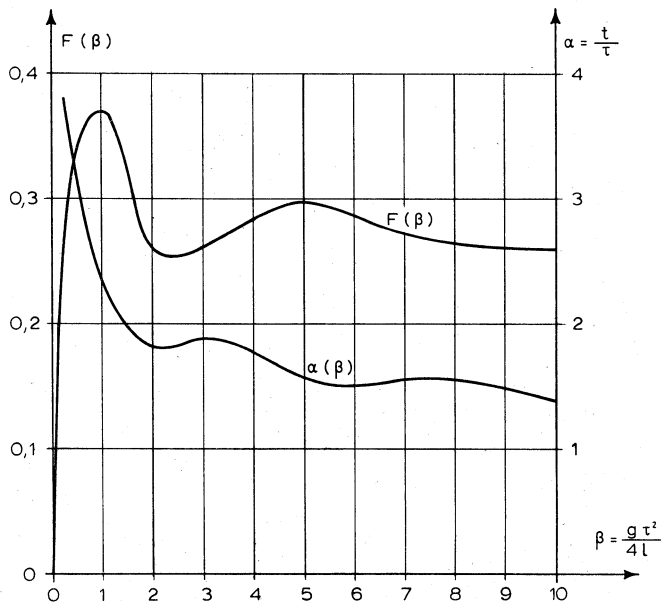


Fig. 1.

Ammessi che il fronte franoso provochi un fronte d'onda pressoché piano, indichiamo con u_0 la velocità media del fronte stesso, con τ la durata della frana, con l_1 ed l_2 le distanze medie percorse dall'onda diretta verso la diga e dall'eventuale prima onda riflessa dalla sponda antistante la frana qualora la frana stessa non fronteggi esattamente la diga.

Assumiamo:

$$u_0 = 20 \text{ m/sec}$$

$$\tau = 30 \text{ sec}$$

$$l_1 = 2500 \text{ m}$$

$$l_2 = 3000 \text{ m.}$$

Il massimo sovralzo per l'onda diretta si ottiene calcolando:

$$\beta_1 = \frac{9,81 \cdot 30^2}{4 \cdot 2500} \simeq 0,883$$

risulta dalla Tabella I, $F(\beta_1) = 0,365$ per cui:

$$\eta_{1 \text{ max}} = 20 \cdot \sqrt{\frac{2500}{9,81}} \cdot 0,365 \simeq 116,54 \text{ m.}$$

L'istante in cui si verifica l'anzidetto valore del sovrizzo, si ha sempre dalla Tabella I e dal grafico di fig. 1, che per il β trovato dà $\alpha_1=2,23$ e quindi

$$t = 2,23 \cdot 30 = 66,9 \text{ sec.}$$

Il massimo dovuto all'onda riflessa, si ottiene analogamente calcolando:

$$\beta_2 = \frac{9,81 \cdot 30^2}{4 \cdot 3000} \simeq 0,736$$

per cui è $F(\beta_2) = 0,350$ e $\alpha_2 = 3,05$.

Risulta quindi:

$$\eta_{2 \max} = 20 \cdot \sqrt{\frac{3000}{9,81}} \cdot 0,350 \simeq 122,41 \text{ m.}$$

D'altra parte, il colmo dell'onda riflessa, giunto in prossimità della diga dopo $t = 3,05 \cdot 30 \simeq 91,50$ sec trova la prima onda un poco attenuata, dato che se la si considera approssimativamente sinusoidale, l'ampiezza iniziale deve moltiplicarsi per un fattore pari a

$$\sin \frac{2\pi \cdot 91,50}{4 \cdot 66,90} \simeq \sin 2,148 = 0,838.$$

Il sovrizzo risultante è quindi:

$$\eta_{\max} = \eta_{1 \max} \cdot 0,838 + \eta_{2 \max} = 220,07 \text{ m.}$$

È evidente che si tratta di un calcolo che, ove venga effettuato in un caso reale, risente di tutte le incertezze relative alla valutazione di τ e di u_0 dato che i cammini percorsi dalle onde possono essere dedotti dalla planimetria con sufficiente precisione; tuttavia è da osservare che mentre u_0 è un fattore che moltiplica il risultato del calcolo e non interviene ulteriormente negli altri parametri, per cui è facile valutare l'incidenza sul risultato stesso di una sua variazione, τ interviene in maniera assai più complessa attraverso la sua influenza sui valori di $F(\beta)$ e $\alpha(\beta)$.

Occorre anche ricordare che il calcolo fatto non tiene conto dell'acqua eventualmente trascinata sul fronte dell'onda mentre il colmo deve ancora giungere, ma trattandosi in effetti di onde molto brevi, è ovvio che a piccola distanza dalla diga l'altezza dell'onda è necessariamente assai vicina a quella calcolata.