Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Edmundo Rofman

Un criterio di stabilità nel metodo di collocazione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.6, p. 879–883.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_879_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Analisi numerica. — *Un criterio di stabilità nel metodo di collocazione.* Nota di EDMUNDO ROFMAN (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — In this paper a criterion is given for the numerical stability of an approximating method for obtaining solutions of some functional equations; this method was given in an earlier paper [1].

Nella Nota [1] ci siamo occupati della risoluzione approssimata dell'equazione funzionale nell'incognita $u \in L^2[a, b]$:

$$u + Ku = f, \tag{1}$$

dove $K : L^2[a, b] \to C^0[a, b]$ è un operatore lineare completamente continuo e $f \in C^0[a, b]$, nell'ipotesi dell'esistenza e dell'unicità della soluzione u^* della (1).

Considerata una successione $\{p_h(x)\}_{h \in N}$ con $p_h(x)$ polinomio di grado h, si ottenevano le soluzioni approssimate

$$u_n(x) = \sum_{h=0}^{n} c_h^{(n)} p_h(x)$$

dopo aver calcolato i coefficienti $c_h^{(n)}$ in modo da soddisfare il sistema lineare

$$u_n(x_i^{(n)}) + Ku_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}), \qquad (i = 0, 1, \cdots, n), \tag{2}$$

essendo gli $x_i^{(n)}$ gli zeri del polinomio $V_{n+1}(x)$ appartenente ad un sistema di polinomi ortogonali $\{V_n(x)\}$ in $[a, b]$, relativo ad un peso $\mu(x) \geq m > 0$.

Chiamando L_n l'operatore lineare che fa corrispondere ad ogni funzione continua in $[a, b]$ il polinomio interpolatore di Lagrange che coincide con la funzione nei punti $x_i^{(n)}$, la (2) risultava equivalente alla

$$(I + L_n K) u_n = L_n f \tag{3}$$

e si era dimostrato che $\exists n_0 \mid \forall n > n_0$, la (2) ammette soluzione unica [cioè $\exists (I + L_n K)^{-1}$] e che questi operatori inversi risultano equilimitati in norma L_2:

$$\| (I + L_n K)^{-1} \|_2 \leq M ; \tag{4}$$

(*) Questo lavoro è stato eseguito mentre l'Autore, nell'aprile del 1972, è stato ospite dell'Istituto di Matematica Applicata della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma e dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 giugno 1972.

si era poi ottenuta la

$$\|u_n - u^*\|_2 \leq \mathrm{M} \, \| \mathrm{L}_n \, u^* - u^* \|_2 \,, \tag{5}$$

dalla quale risultava la convergenza in L^2 delle u_n verso u^* giacchè, per un Teorema di Erdos–Turan [2], si ha $\| \mathrm{L}_n u^* - u^* \|_2 \to 0 \; (n \to \infty)$.

Allo scopo di studiare la stabilità del metodo, nel senso che dopo si preciserà, riscriviamo la (2) mettendo in evidenza i coefficienti $c_h^{(n)}$:

$$\sum_{h=0}^{n} a_{ih}^{(n)} \, c_h^{(n)} = f(x_i^{(n)}) \,, \qquad (i = 0 \,, 1 \,, \cdots , n) , \tag{6}$$

dove $a_{ih}^{(n)} = p_h(x_i^{(n)}) + \mathrm{K} p_h(x_i^{(n)})$.

Se si considera che gli elementi della matrice $\mathrm{A}_n = ((a_{ih}^{(n)}))$ e del vettore $f_n = \begin{pmatrix} f(x_0^{(n)}) \\ \vdots \\ f(x_n^{(n)}) \end{pmatrix}$ sono stati calcolati rispettivamente con certi errori $\alpha_{ih}^{(n)}$, $\beta_i^{(n)}$, in realtà saremo portati a risolvere quest'altro sistema

$$\sum_{h=0}^{n} (a_{ih}^{(n)} + \alpha_{ih}^{(n)}) \, \hat{c}_h^{(n)} = f(x_i^{(n)}) + \beta_i^{(n)} \,, \qquad (i = 0 \,, 1 \,, \cdots , n) , \tag{7}$$

la cui eventuale soluzione non fornisce la $u_n(x)$, ma una certa

$$\hat{u}_n(x) = \sum_{h=0}^{n} \hat{c}_h^{(n)} \, p_h(x) \,. \tag{8}$$

Ci occuperemo, in quanto segue, di studiare l'esistenza della soluzione di (7) e stabilire come dipendono le differenze $u_n(x) - \hat{u}_n(x)$ dai valori $\alpha_{ih}^{(n)}$ e $\beta_i^{(n)}$.

Consideriamo le (6), (7) sotto forma matriciale

$$\mathrm{A}_n \cdot c_n = f_n \,, \tag{6'}$$

$$(\mathrm{A}_n + \alpha_n) \cdot \hat{c}_n = f_n + \beta_n \tag{7'}$$

dove i vettori c_n, $\hat{c}_n$, f_n, $\beta_n \in \mathbf{R}_{n+1}$, mentre le matrici A_n, α_n, come operatori $(\mathbf{R}_{n+1} \to \mathbf{R}_{n+1})$, si considerano appartenenti ad uno spazio lineare normato con la norma spettrale [1].

Costruiamo poi le matrici (hermitiane positive):

$$\mathrm{P}_n = \left(\left(\int_a^b \mu(x) \, p_i(x) \, \bar{p}_h(x) \, \mathrm{d}x \right) \right) , \qquad (i \,, h = 0 \,, 1 \,, \cdots , n) ,$$

(1) $\|\mathrm{A}_n\|_{sp} = [\text{massimo autovalore di } \mathrm{A}_n^* \, \mathrm{A}_n]^{1/2}$. Questa norma risulta consistente con quella di $\mathbf{R}_{n+1}$ (vedi ad esempio [3]).

ed al variare di n, fissiamo l'attenzione sulla successione decrescente $\{\lambda_1^{(n)}\}_{n\in N}$ dove $\lambda_1^{(n)}$ è il primo autovalore della P_n. Trattandosi di una successione a termini positivi, si avrà

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} = \lambda_1 \geq 0 .$$

Siamo così in grado di enunciare il seguente:

TEOREMA (di stabilità): *Se* $\lambda_1 > 0$ *esistono tre numeri positivi* q, r, s (*indipendenti da* n *e* f) *ed un indice* n_0 *tali che, per* $n > n_0$ *e* $\|\alpha_n\|_{sp} \leq s$ *il sistema* (7) *ammette soluzione unica e, inoltre*:

$$\|u_n - \hat{u}_n\|_2 \leq q \|u_n\|_2 \, \|\alpha_n\|_{sp} + r \|\beta_n\|_{\mathbf{R}_{n+1}} . \tag{9}$$

OSSERVAZIONE. – Giova osservare che gli u_n sono equilimitati in norma, più precisamente si ha:

$$\|u_n\|_2 \leq \chi \max_{[a,b]} |u^*(x)| , \tag{10}$$

con χ indipendente da n e f. Infatti il Teorema di Erdos–Turan ci dice che L_n, come operatore da C^0 in L^2 converge fortemente verso I ed in conseguenza si ha $\|L_n\| \leq w$, $\forall n$; questa proprietà, assieme alle (3), (4), ci fornisce la (10), con χ dipendente da $M, w, \mu(x)$.

Dimostrazione. – Siano

$$G_n = ((g_{ik})) , \qquad (n \in N ; \quad i, k = 0, 1, \cdots, n ; \quad g_{ik} = 0 \quad \text{se } i < k)$$

le matrici triangolari che ortonormalizzano i $\{p_h(x)\}_{h\in N}$, cioè tali che

$$\sum_{k=0}^{n} g_{ik} \sum_{l=0}^{n} \int_a^b \mu(x)\, p_h(x)\, \bar{p}_l(x)\, dx \cdot \bar{g}_{jl} = \delta_{ij} \tag{11}$$

o, succintamente

$$G_n \cdot P_n \cdot G_n^* = I_n . \tag{11'}$$

Da qui si trae

$$P_n^{-1} = G_n^* \, G_n$$

e in conseguenza

$$\|G_n\|_{sp} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} .$$

D'altra parte, essendo G_n' la trasposta di G_n, porremo

$$\begin{cases} b_n = (G_n')^{-1} c_n & , \quad \hat{b}_n = (G_n')^{-1} \hat{c}_n , \\ A_n G_n' = B_n & , \quad \alpha_n G_n = \tilde{\alpha}_n . \end{cases} \tag{12}$$

In tal modo le (6′), (7′) diventano

$$(6'') \qquad B_n\, b_n = f_n\,,$$

$$(7'') \qquad (B_n + \tilde{\alpha}_n)\, \tilde{b}_n = f_n + \beta_n\,.$$

Un'altra conseguenza di (12) è che le componenti di b_n saranno le coordinate di u_n nel sistema $\{p_n(x)\}_{h \in N}$ ortonormalizzato:

$$u_n(x) = \sum_{h=0}^{n} c_h^{(n)} p_h(x) = \sum_{h=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} g_{ih}^{(n)} b_i^{(n)} \right) p_h(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i^{(n)} \sum_{h=0}^{n} g_{ih}^{(n)} p_h(x)\,,$$

da cui:

$$(13) \qquad \| u_n \|_2 = \| b_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}}\,,$$

$$(14) \qquad \| u_n - \hat{u}_n \|_2 = \| b_n - \hat{b}_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}}\,.$$

Dalla esistenza (per n sufficientemente grande) di A_n^{-1} (Nota [1]), e dalla definizione di B_n, segue l'esistenza per gli stessi n di B_n^{-1}.

Dimostriamo ora il seguente:

LEMMA: $\exists \nu$, N (*costanti*) | $\forall n > \nu$, $\| B_n^{-1} \|_{sp} < N$. *Dalla* (1), *essendo* $f \in C^0$ *e* K *completamente continuo, segue che esiste una costante* γ *tale che, per ogni* f:

$$\max_{[a,b]} | u^*(x) | \leq \gamma \max_{[a,b]} | f(x) |\,.$$

Tenendo conto della (10) segue

$$(15) \qquad \| u_n \|_2 \leq \chi\gamma \max_{[a,b]} | f(x) |\,.$$

Questa disuguaglianza rimane valida se si sostituisce la $f(x)$ con un'altra funzione continua coincidente con quella nei punti $x_i^{(n)}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, giacchè sono soltanto i valori assunti in questi punti quelli che contano nel metodo. Può scriversi

$$\| u_n \|_2 \leq \chi\gamma \max_{0 \leq i \leq n} | f(x_i^{(n)}) |$$

e, successivamente

$$(16) \qquad \| u_n \|_2 \leq \chi\gamma \, \| f_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}}\,.$$

Dalle (13) e (6″) si ha, inoltre

$$\| u_n \|_2 = \| B_n^{-1} \cdot f_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}}$$

e ne segue la tesi del Lemma con $N = \chi\gamma$.

Per provare l'esistenza dell'inverso di $B_n + \tilde{\alpha}_n$, ed in conseguenza la risolubilità del sistema (7), occorre osservare che

$$(17) \qquad B_n + \tilde{\alpha}_n = B_n (I + B_n^{-1} \tilde{\alpha}_n)\,.$$

Siccome si ha

$$\| \tilde{\alpha}_n \|_{sp} = \| \alpha_n \, G_n \|_{sp} \leq \| \alpha_n \|_{sp} \, \| G_n \|_{sp}$$

mentre, dalla ipotesi $\lambda_1 > 0$ segue $\| G_n \|_{sp} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} < \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, è chiaro che basta assumere $\| \alpha_n \|_{sp} \leq \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\,N} = s$ (2) e tenere conto del Lemma precedente per avere $\| B_n^{-1} \, \tilde{\alpha}_n \|_{sp} \leq 1/2$ ed arrivare così alla prima parte della tesi del teorema.

Il valore ora assunto per s ci permette inoltre di affermare che si ha $\| (B_n + \tilde{\alpha}_n)^{-1} \|_{sp} \leq 2\,N$. Essendo in virtù di (6′′) e (7′′)

$$(B_n + \tilde{\alpha}_n)\,(b_n - \tilde{b}_n) = \tilde{\alpha}_n \, b_n - \beta_n \tag{18}$$

e tenendo conto delle (13) e (14), si ricava

$$\| u_n - \hat{u}_n \|_2 = \| b_n - \hat{b}_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}} \leq 2\,N \left(\| \tilde{\alpha}_n \|_{sp} \, \| b_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}} + \| \beta_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}} \right) \leq$$
$$\leq \frac{2\,N}{\sqrt{\lambda_1}} \, \| \alpha_n \|_{sp} \, \| u_n \|_2 + 2\,N \, \| \beta_n \|_{\mathbf{R}_{n+1}}$$

cioè la seconda parte della tesi del teorema con $q = \frac{2\,N}{\sqrt{\lambda_1}}$ e $r = 2\,N$.

OSSERVAZIONE. – Se si considera l'equazione differenziale lineare di ordine s:

$$\sum_{k=0}^{s} a_{s-k}(x) \, y^{(k)} = f(x) \,, \qquad (a_s = 1 \; ; \; a_{s-k}(x) \,, f(x) \in C^0 [a \,, b]) \,,$$

con s condizioni omogenee agli estremi, e si applica il metodo di collocazione secondo il procedimento esposto in [1], si possono stabilire disuguaglianze relative al $\max\limits_{[a,b]} | y_n(x) - \hat{y}_n(x) |$ attraverso la funzione di Green del problema in studio. Si avrà così

$$| y_n(x) - \hat{y}_n(x) | \leq \left[\int_a^b G^2(x \,, \xi) \, d\xi \right]^{1/2} \| y_n^{(s)} - \hat{y}_n^{(s)} \|_2 \,, \qquad \forall x \in [a \,, b]$$

dove, per $\| y_n^{(s)} - \hat{y}_n^{(s)} \|_2$ vale un risultato simile a quello indicato nella (9).

BIBLIOGRAFIA

[1] ROFMAN E., *Teoremi di convergenza del metodo di collocazione*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Classe Sc. Fis. Mat. e Nat. », ser. VIII, *49* (3–4), 1970 (IAC, ser. III, n. 61).

[2] ERDOS P. e TURAN P., *On interpolation*, « I. Ann. of Math. », *38*, 142–155 (1937).

[3] COLLATZ L., *Functional Analysis and numerical mathematics*. Ac. Press 1966.

(2) Basta soddisfare questa disuguaglianza in qualsiasi altra norma consistente giacchè la norma spettrale è la minore di tutte (vedi, ad esempio [3], pag. 184).