Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Corrado Scaravelli

Opportunità di presentare le equazioni alle differenze finite anche nella forma di equazioni alle prederivate. Il caso lineare e a coefficienti costanti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.6, p. 861–867.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_861_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Equazioni alle differenze finite. — *Opportunità di presentare le equazioni alle differenze finite anche nella forma di equazioni alle prederivate. Il caso lineare e a coefficienti costanti* (*). Nota di CORRADO SCARAVELLI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — In this paper I emphasize the expediency of puting finite difference equations also in the form of prederivative equations. Here I study only the linear ordinary prederivative equations with constant coefficients: for them I show two methods of solution.

1. – INTRODUZIONE

1.1. – Tenendo presente il concetto di prederivata (1), è naturale chiamare *equazione alle prederivate* (*ordinarie*) una equazione alle differenze del tipo

$$F(x\,,u(x)\,,u^{(1;h)}(x)\,,u^{(2;h)}(x)\,,\cdots,u^{(n;h)}(x))=0\,, \tag{1}$$

dove $F(x\,,t_0\,,t_1\,,t_2\,,\cdots,t_n)$ è una data funzione di $n+2$ variabili indipendenti.

Ritengo sia opportuno, in generale, porre le equazioni alle differenze anche nella forma (1) per accentuare l'analogia di scrittura fra equazioni alle differenze ed equazioni differenziali: ciò, allo scopo di accrescere i collegamenti fra i due tipi di equazioni, ed agevolare eventualmente (come intendo mostrare in un prossimo lavoro) la risoluzione delle equazioni differenziali stesse.

1.2. – In questa Nota mi propongo di risolvere le equazioni alle prederivate ordinarie (con un passo prefissato h) d'ordine finito, lineari e a coefficienti costanti nel senso del Calcolo alle differenze finite [precisamente a coefficienti periodici di periodo h, o costanti per l'incremento h (2)], ossia le equazioni della forma

$$\tilde{p}_0\; u^{(n;h)}(x)+\tilde{p}_1\; u^{(n-1;h)}(x)+\cdots+\tilde{p}_{n-1}\; u^{(1;h)}(x)+\tilde{p}_n\; u(x)=f(x), \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Nella seduta del 16 giugno 1972.

(1) La *prederivata* (*ordinaria, rispetto ad x e col passo h*) di una funzione $u(x)$ è data da (cfr. [2]) $\{u(x+h)-u(x)\}/h$. Indicando brevemente tale rapporto con $u^{(1;h)}(x)$, oppure $D_{x;h}\,u(x)$ (dove $D_{x;h}$ è il *prederivatore rispetto ad x e col passo h*), sarà:

$$u^{(m;h)}(x)=D^m_{x;h}\,u(x)=h^{-m}\sum_{0}^{m}{}_s(-1)^s\binom{m}{s}u(x+(m-s)h)\qquad(m=0,1,2,\cdots).$$

(2) Cfr. ([3], I e II).

dove: x è la variabile indipendente (che suppongo *reale*); h è un «passo» assegnato (reale) non nullo; $u(x)$ è la funzione incognita; $f(x)$ è una data funzione (reale o complessa) univoca, definita in modo qualsiasi su un intervallo $x_0 \leq x < x_1$ (3); $\tilde{p}_r \equiv \tilde{p}_r(x;h)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, n)$ sono date costanti per l'incremento h.

Indico qui due metodi per risolvere la (2):

Metodo 1° (analogo a quello usuale per le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti). Risolvo l'equazione omogenea corrispondente a (2), facendo ricorso alla relativa equazione (algebrica) caratteristica, che suppongo di sapere effettivamente risolvere (v. § 2). Tralascio però la determinazione di una soluzione particolare di (2) perchè essa s'ottiene in modo naturale col metodo seguente (senza far intervenire la soluzione dell'equazione omogenea).

Metodo 2°. Pongo dapprima l'equazione (2) nella forma (cfr. [3], parte II)

$$\tilde{a}_0 \;\; u(x+nh)+\tilde{a}_1 \;\; u(x+(n-1)h)+\cdots+\tilde{a}_{n-1} \;\; u(x+h)+\tilde{a}_n \;\; u(x)=f(x), \tag{3}$$

per la quale ho già indicato (v. [3], parte II) la soluzione generale in forma razionale. Sostituisco poi, in tale soluzione generale, ai coefficienti $\tilde{a}_r$ le corrispondenti espressioni mediante i $\tilde{p}_r$ [v. la formula (10) seguente], ottenendo così (in forma razionale) la soluzione generale di (2) (v. § 3).

Ne segue che per risolvere l'equazione (2) è preferibile il Metodo 2°.

Termino con un semplice esempio (v. § 3, n. 3.4).

2. – Risoluzione dell'equazione omogenea corrispondente a (2), ricorrendo all'equazione caratteristica

Considero l'equazione omogenea, corrispondente a (2),

$$\tilde{p}_0 \;\; u^{(n;h)}(x)+\tilde{p}_1 \;\; u^{(n-1;h)}(x)+\cdots+\tilde{p}_{n-1} \;\; u^{(1;h)}(x)+\tilde{p}_n \;\; u(x)=0, \tag*{$(2)_0$}$$

dove ora suppongo che l'ordine di $(2)_0$ sia effettivamente n, cioè risulti $\tilde{p}_0 \not\equiv 0$; anzi, per semplicità, suppongo sia sempre $\tilde{p}_0 \neq 0$.

Si vede facilmente che: «Se (e solo se) $\tilde{\alpha}$ è una radice dell'equazione caratteristica di $(2)_0$:

$$\tilde{p}_0 \;\; t^n+\tilde{p}_1 \;\; t^{n-1}+\cdots+\tilde{p}_{n-1} \;\; t+\tilde{p}_n=0 \tag{4}$$

(e allora $\tilde{\alpha}$ sarà, come i coefficienti $\tilde{p}_r$, una costante per l'incremento h), la funzione $u(x) = (1+\tilde{\alpha}h)^{x/h}$ è soluzione della $(2)_0$». Infatti, avendosi

$$\mathrm{D}^r_{x;h}(1+\tilde{\alpha}h)^{x/h} = \tilde{\alpha}^r \;\; (1+\tilde{\alpha}h)^{x/h} \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots),$$

(3) Cfr. ([3], I e II).

il primo membro di $(2)_0$ calcolato per la funzione $u(x) = (1 + \tilde{\alpha} h)^{x/h}$ dà

$$(\tilde{p}_0 \quad \tilde{\alpha}^n + \tilde{p}_1 \quad \tilde{\alpha}^{n-1} + \cdots + \tilde{p}_{n-1} \quad \tilde{\alpha} + \tilde{p}_n)(1 + \tilde{\alpha} h)^{x/h},$$

prodotto nullo se (e solo se) è nullo il primo fattore, cioè se $\tilde{\alpha}$ è una radice di (4).

Anche qui (come per le equazioni differenziali ordinarie, lineari, omogenee e a coefficienti costanti) conviene distinguere due casi:

Caso 1°. L'equazione caratteristica (4) ha le radici $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n$ (costanti per l'incremento h) tutte semplici. Allora la soluzione generale di $(2)_0$ è data da

$$u(x) = \tilde{c}_1 \quad (1 + \tilde{\alpha}_1 h)^{x/h} + \tilde{c}_2 \quad (1 + \tilde{\alpha}_2 h)^{x/h} + \cdots + \tilde{c}_n \quad (1 + \tilde{\alpha}_n h)^{x/h}, \tag{5}$$

con $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$ arbitrarie costanti per l'incremento h.

Caso 2°. L'equazione caratteristica (4) ha le radici $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_s$ non tutte semplici: gli ordini di molteplicità rispettivi siano $r_1, r_2, \cdots, r_s$ $(r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n)$. Allora la soluzione generale di $(2)_0$ è data da una combinazione lineare (a coefficienti arbitrari e costanti per l'incremento h) delle n soluzioni particolari:

$$x^{m;h} \quad (1 + \tilde{\alpha}_\mu h)^{x/h} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots, r_\mu - 1; \quad \mu = 1, 2, \cdots, s) \tag{6}$$ (4).

Osservazione. Quando i coefficienti $\tilde{p}_r$ sono tutti reali, l'equazione caratteristica (4) può avere anche delle radici complesse (a coppie coniugate). Allora, fra le soluzioni particolari figuranti nel secondo membro di (5) e nella (6) vi sono soluzioni a valori complessi: a queste si possono sostituire soluzioni a valori reali, che permettono di scrivere ancora la soluzione generale di $(2)_0$ in forma reale. Infatti, se $\tilde{\alpha} = \tilde{a} + i\tilde{b}$, $\bar{\tilde{\alpha}} = \tilde{a} - i\tilde{b}$ (con $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ reali) sono due radici complesse coniugate, di (4), multiple d'ordine r, alle soluzioni particolari a valori complessi

$$x^{m;h} \quad (1 + \tilde{\alpha} h)^{x/h}, \qquad x^{m;h} \quad (1 + \bar{\tilde{\alpha}} h)^{x/h}, \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots, r - 1), \tag{7}$$

basta sostituire le soluzioni particolari a valori reali

$$x^{m;h} \quad (1 + \tilde{a} h)^{x/h} \quad \cos_{h\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma} x, \qquad x^{m;h} \quad (1 + \tilde{a} h)^{x/h} \quad \operatorname{sen}_{h\tilde{\gamma}} \tilde{\gamma} x, \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots, r - 1), \tag{8}$$

(4) Con $x^{m;h}$ indico la *potenza, della x, di esponente m e di passo h*; potenza così definita (cfr. [2]):

$$x^{0;h} = 1, \qquad x^{m;h} = x(x - h)(x - 2h) \cdots (x - (m - 1)h) \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots).$$

dove si è posto:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{b}/(1+\tilde{a}h)\,; \qquad \cos_h x = \{(1+ih)^{x/h} + (1-ih)^{x/h}\}/2\,,$$
$$\operatorname{sen}_h x = \{(1+ih)^{x/h} - (1-ih)^{x/h}\}/(2i)\,,$$

essendo $\cos_h x$, $\operatorname{sen}_h x$ le naturali estensioni delle funzioni circolari $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ nel Calcolo alle differenze finite [5].

3. – Risoluzione generale, in modo razionale, dell'equazione non omogenea (2)

3.1. – Nell'equazione non omogenea (2) suppongo, per semplicità, $\tilde{p}_0$ mai nulla, $h > 0$ [6]; inoltre, relativamente all'intervallo $(x_0 \cdots x_1 -)$ in cui è definita la $f(x)$, è necessario che sia $x_1 - x_0 > nh$ (cfr. [3], parte II).

Essendo $x \in (x_0 \cdots x_1 -)$, la parte intera del rapporto $(x - x_0)/h$ è qui indicata (come in [3], parte I, § 2) con il simbolo

$$\nu = \nu_{(x-x_0)/h}\,.$$

Ne segue, cambiando x in $x+h$, la proprietà

$$\nu_{(x+h-x_0)/h} = \nu_{(x-x_0)/h} + 1\,.$$

3.2. – Trasformo l'equazione (2) nell'equazione (3). A tale scopo osservo dapprima che è [cfr. loc. cit. in [1]]

$$u^{(m;h)}(x) = h^{-m} \sum_{0}^{m}{}_s (-1)^s \binom{m}{s} u(x+(m-s)h) \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots).$$

La (2) si può scrivere, allora,

$$\sum_{0}^{n}{}_r \tilde{p}_r\, h^{r-n} \sum_{0}^{n-r}{}_s (-1)^s \binom{n-r}{s} u(x+(n-r-s)h) = f(x)\,,$$

(5) Per passare dalle (7) alle (8) basta notare che, se le (7) sono soluzioni particolari di $(2)_0$, saranno anche soluzioni

$$(*) \qquad x^{m;h}\, \{(1+\tilde{\alpha}h)^{x/h} \pm (1+\bar{\tilde{\alpha}}h)^{x/h}\}/2 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots, r-1).$$

Ma è

$$(1+\tilde{\alpha}h)^{x/h} \pm (1+\bar{\tilde{\alpha}}h)^{x/h} = ((1+\tilde{a}h) + i\tilde{b}h)^{x/h} \pm ((1+\tilde{a}h) - i\tilde{b}h)^{x/h} =$$
$$= (1+\tilde{a}h)^{x/h} \left\{ \left(1 + i\frac{\tilde{b}h}{1+\tilde{a}h}\right)^{x/h} \pm \left(1 - i\frac{\tilde{b}h}{1+\tilde{a}h}\right)^{x/h} \right\}.$$

Onde (ricordando le definizioni di $\cos_h x$, $\operatorname{sen}_h x$, e l'espressione di $\tilde{\gamma}$) dalle (*) si ottengono proprio le soluzioni particolari reali (8).

(6) Per $h < 0$ si procede analogamente.

od anche, ponendo $r+s=\mu$,

$$\sum_0^n{}_r \sum_r^n{}_\mu (-1)^{\mu-r} \binom{n-r}{\mu-r} \tilde{p}_r \, h^{r-n} \quad u(x+(n-\mu)h)=f(x),$$

onde, scambiando le sommatorie, si ottiene:

$$\sum_0^n{}_\mu \left\{ \sum_0^\mu{}_r (-1)^{\mu-r} \binom{n-r}{\mu-r} \tilde{p}_r \, h^{r-n} \right\} u(x+(n-\mu)h)=f(x), \tag{9}$$

che è proprio l'equazione (2) ricondotta alla forma (3). Ne segue che fra i coefficienti $\tilde{p}_r$ della equazione (2) e i coefficienti $\tilde{a}_r$ della equivalente equazione (3) si ha il legame:

$$\tilde{a}_\mu = \sum_0^\mu{}_r (-1)^{\mu-r} \binom{n-r}{\mu-r} \tilde{p}_r \, h^{r-n} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots, n). \tag{10}$$

Quindi (usando la terminologia introdotta in [3], I e II) posso dire che: *la soluzione generale elementare di* (2) *si ottiene dalla soluzione generale elementare della corrispondente* (3) *sostituendo ai coefficienti* $\tilde{a}_\mu$ *le loro espressioni date da* (10).

Precisamente, si ha (cfr. [3], parte II):

$$A_s = \sum_0^s{}_r \sum_0^r{}_{r_1} \cdots \sum_0^{r_{n-2}}{}_{r_{n-1}} (-1)^r \binom{r}{r_1} \cdots \binom{r_{n-2}}{r_{n-1}} \tilde{\mathfrak{a}}_{n;r,r_1,\cdots,r_{n-1}} \; \varepsilon_{s-\sigma}, \tag{11}$$

con

$$\tilde{\mathfrak{a}}_{n;r,r_1,\cdots,r_{n-1}} = \left(\tilde{a}_1^{\,r-r_1} \cdots \tilde{a}_{n-1}^{\,r_{n-2}-r_{n-1}} \; \tilde{a}_n^{\,r_{n-1}}\right) / \tilde{a}_0^{\,r+1},$$

$$s = 0, 1, 2, \cdots, \nu; \qquad \sigma = r + r_1 + \cdots + r_{n-1},$$

$$\cdots = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0 \text{ [7]}.$$

Sostituendo gli $\tilde{a}_\mu$ con le loro espressioni (10), concludo: *La soluzione generale elementare di* (2) *è data da*

$$u(x) = \mathfrak{F}(x;h) + \mathfrak{U}(x;h), \tag{12}$$

dove:

$$\mathfrak{F}(x;h) = \begin{cases} 0, & x \in (x_0 \cdots (x_0+nh)-) \\ \sum_0^{\nu-n}{}_s A_s \; f(x-(n+s)h), & x \in (x_0+nh \cdots x_1 -) \end{cases} \tag{13}$$

è la soluzione elementare dell'equazione (2);

$$\mathfrak{U}(x;h) = \sum_1^n{}_m \tilde{\omega}_m \, A_{\nu-m+1}, \qquad x \in (x_0 \cdots +\infty) \tag{14}$$

(*con* $\tilde{\omega}_m$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h) *è la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente a* (2).

(7) Cfr. annotazione (5) di [3], parte II.

3.3. – IL CASO PARTICOLARE $n = 2$.

Per $n = 2$ le (2), (3), (9) diventano, rispettivamente,

$$(2)' \qquad \tilde{p}_0 \; u^{(2;h)}(x) + \tilde{p}_1 \; u^{(1;h)}(x) + \tilde{p}_2 \; u(x) = f(x) ,$$

$$(3)' \qquad \tilde{a}_0 \; u(x+2h) + \tilde{a}_1 \; u(x+h) + \tilde{a}_2 \; u(x) = f(x) ,$$

$$(9)' \qquad \frac{\tilde{p}_0}{h^2} \; u(x+2h) - \left(2\frac{\tilde{p}_0}{h^2} - \frac{\tilde{p}_1}{h}\right) \; u(x+h) + \left(\frac{\tilde{p}_0}{h^2} - \frac{\tilde{p}_1}{h} + \tilde{p}_2\right) \; u(x) = f(x).$$

La (9)′ è la stessa (3)′ in quanto si ha

$$(10)' \qquad \tilde{a}_0 = \frac{\tilde{p}_0}{h^2} , \qquad \tilde{a}_1 = -\frac{2\tilde{p}_0}{h^2} + \frac{\tilde{p}_1}{h} , \qquad \tilde{a}_2 = \frac{\tilde{p}_0}{h^2} - \frac{\tilde{p}_1}{h} + \tilde{p}_2 .$$

Pertanto, *la soluzione generale elementare di* (2)′ *è data dalla soluzione generale elementare di* (9)′. Precisamente, ricordando che è [cfr. n. (3.1)] $\nu = \nu_{(x-x_0)/h} =$ $= \{$parte intera di $(x - x_0)/h\}$, e che ora risulta

$$(11)' \qquad A_s = \sum_0^s {}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} \left(\frac{\tilde{p}_1}{h} - \frac{2\tilde{p}_0}{h^2}\right)^{2r-s} \left(\frac{\tilde{p}_0}{h^2} - \frac{\tilde{p}_1}{h} + \tilde{p}_2\right)^{s-r} \Big/ \left(\frac{\tilde{p}_0}{h^2}\right)^{r+1} ,$$

abbiamo:

La soluzione generale elementare di (2)′ *è data da*

$$(12)' \qquad u(x) = \mathfrak{F}(x\,;h) + \mathfrak{A}(x\,;h) ,$$

dove:

$$(13)' \qquad \mathfrak{F}(x\,;h) = \begin{cases} 0 , & x \in (x_0 \cdots (x_0 + 2h) -) \\ \sum_0^{\nu-2} {}_s A_s \; f(x - (s+2)h) , & x \in (x_0 + 2h \cdots x_1 -) \end{cases}$$

è la soluzione elementare di (2)′;

$$(14)' \qquad \mathfrak{A}(x\,;h) = \tilde{\omega}_1 \; A_\nu + \tilde{\omega}_2 \; A_{\nu-1} , \qquad x \in (x_0 \cdots + \infty)$$

(*con* $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ *arbitrarie costanti per l'incremento* h) *è la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente a* (2)′.

3.4. – UN ESEMPIO SEMPLICE.

Si abbia da risolvere l'equazione alle prederivate

$$(15) \qquad u^{(2;h)}(x) = f(x) \qquad (x \geq 0 , \; h > 0).$$

La (11)′ ci dà ora

$$A_s = (-1)^s \; 2^{-s} \; h^2 \sum_0^s {}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} 4^r , \qquad \text{ossia} \quad A_s = (s+1)h^2,$$

come segue dall'osservare che risulta

$$(-1)^s \; 2^{-s} \sum_0^s {}_r (-1)^r \binom{r}{s-r} 4^r = s+1 \, .$$

La soluzione elementare $\mathfrak{F}(x\,;h)$ è allora, per la (13)',

$$\mathfrak{F}(x\,;h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (0 \cdots 2h-) \\ h^2 \sum_0^{\nu-2} {}_s (s+1) \; f(x-(s+2)h)\,, \quad \nu = \nu_{x/h}\,, & x \in (2h \cdots +\infty). \end{cases}$$

Dalla (14)' si ha poi

$$\mathfrak{U}(x\,;h) = \tilde{\omega}_1 \; (\nu+1) \; h^2 + \tilde{\omega}_2 \; \nu \; h^2, \qquad \nu = \nu_{x/h}\,, \quad x \in (0 \cdots +\infty),$$

che è la soluzione generale elementare dell'equazione omogenea corrispondente a (15).

BIBLIOGRAFIA

[1] N.-E. NÖRLUND, *Leçons sur les équations lineaires aux différences finies*, Gauthier-Villars, Paris (1929).

[2] C. SCARAVELLI, *Polinomi di Appell nel senso del Calcolo delle differenze finite*, « Riv. Mat. Univ. Parma » (2) *8*, 355-366 (1967).

[3] C. SCARAVELLI, *Risoluzione, razionale nelle funzioni date, delle equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari e a coefficienti periodici di periodo h* (I-II), « Riv. Mat. Univ. Parma », (2) *11*, 15-41 (1970); (2) *12* (1971).