Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gheorghe Bantaş

- Théorèmes d'existence et d'unicité dans la théorie des équations intégro-fonctionnelles de Volterra

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.6, p. 856–860.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_856_0>

Equazioni funzionali. — *Théorèmes d'existence et d'unicité dans la théorie des équations intégro–fonctionnelles de Volterra.* Nota di GHEORGHE BANTAȘ, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Sono presentati dei teoremi di esistenza ed unicità in alcuni spazi funzionali per le soluzioni di alcune equazioni integro–funzionali di Volterra.

1. Ce travail contient quelques résultats relatifs à l'existence et l'unicité des solutions de certaines classes d'équations intégro–fonctionnelles de Volterra dans les espaces $\mathfrak{L}_g$ et l_g définis dans ce qui suit. La technique utilisée est fondé sur la méthode de Massera–Schäffer–Corduneanu ([16], [10]–[13]), sur le théorème de point fixe de Banach et sur quelques théorèmes de T–admissibilité (les Propositions 1–6).

Une partie des résultats enoncés dans cette note paraîtront, en détail, dans [3], [4], [5].

Soit R_a la demi–axe $[a, \infty)$, R^p l'espace Euclideen réel à p dimensions et $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel localement convexe et séparé des fonctions continues $x : R_a \to R^p$, avec la topologie générée par la famille dénombrable et suffisante de semi–normes

$$|x|_m = \sup_{a \leq t \leq m} \| x(t) \|$$

où $m \in N$ et $\| x(t) \|$ est la longuer euclideenne du vecteur $x(t)$.

Soient g et h deux fonctions scalaires, continues et strictement positives sur R_a.

Dans l'espace $\mathcal{C}$, nous considérons l'espace de Banach C_g des fonctions x, ayant le rapport $\| x(t) \| / g(t)$ borné sur R_a et dont la norme est définie par

$$|x|_g = \sup_{t \geq a} (\| x(t) \| / g(t)) .$$

Dans le même espace nous considérons, l'espace de Banach $\mathfrak{L}_g$ ([14], [15]) des fonctions x pour lequel le rapport $x(t)/g(t)$ possède une limite finie à l'infini et dont la norme est celle de C_g. La limite d'un élément $x \in \mathfrak{L}_g$ sera notée par x_g^*:

$$\lim_{t \to \infty} (x(t)/g(t)) = x_g^* \in R^p .$$

Dans l'espace $\mathfrak{L}_g$ nous considérons le sous espace de Banach l_g des fonctions x pour lequel $x_g^* = 0$.

La sphère de centre θ et de rayon ρ de l'espace $\mathfrak{L}_g$ (resp. l_g) sera notée par S_g (resp. σ_g).

(*) Nella seduta del 16 giugno 1972.

2. Considérons les opérateurs intégraux $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et $T^b : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ définis par les relations:

$$(Tx)(t) = \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds \quad , \quad (T^b x)(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \,, \qquad (t \geq a),$$

où $b \geq a$ est un nombre réel et K une matrice carrée d'ordre p, continue sur l'ensemble $\Delta = \{(t, s)/a \leq s \leq t < \infty\}$.

Nous désignérons par $\mathbf{T}$ l'opérateur intégral scalaire généré par $\| K \|$. Ensuite, nous poserons $\mathbf{C}_h = \| \mathbf{T}_g \|_h$.

DÉFINITION. *Une paire d'espaces de Banach* B, $D \subset \mathcal{C}$ *s'appelle* T*–admissible si* $TB \subset D$ ([10]).

HYPOTHÈSES. Sur le noyau K nous admettrons soit l'hypothèse

$$\text{(H)} \qquad T^b(g) \in \mathcal{L}_h \qquad \forall b \geq a$$

soit les hypothèses plus restrictives

$$\text{(H}'\text{)} \qquad K(t, s) \rightrightarrows k(s) \,, \qquad \forall\, [a, b] \subset R_a$$

$$\text{(H}''\text{)} \qquad T^b(g) \in l_h \,.$$

Nous noterons par $(k \bullet, \ ) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'opérateur défini par l'égalité

$$(k \bullet x)(t) = \int_a^t k(s)\, x(s)\, ds \,, \qquad (t \geq a) \,.$$

PROPOSITION 1. *Sous l'hypothèse* (H′), *la paire* $(C_g, \mathcal{L}_1)$ *est* T*–admissible si et seulement si* $(\| k \| \bullet g) \in \mathcal{L}_1 (R_a, R)$ *et* $(\mathbf{T}g)^* = (\| k \| \bullet g)^*$.

Dans ces conditions, $(Tx)^* = (k \bullet x)^*$ *pour chaque* $x \in C_g$.

PROPOSITION 2. a) *Dans l'hypothèse* (H) *la paire* $(\mathcal{L}_g, \mathcal{L}_h)$ *est* T*–admissible si et seulement si,* $Tg \in \mathcal{L}_h$ *et* $\mathbf{T}g \in C_h (R_a, R)$.

b) *Si nous remplaçons dans a) l'hypothèse* (H) *par* (H′) *et h par* 1, *alors pour chaque* $x \in \mathcal{L}_g$ *on aura*:

i) $(\| k \| \bullet x) \in \mathcal{L}_1 (R_a, R)$

ii) $(Tx)_1^* - (k \bullet x)_1^* = [(Tg)_1^* - (k \bullet g)_1^*]\, x_g^*$.

PROPOSITION 3. a) *Sous l'hypothèse* (H) *la paire* $(l_g, \mathcal{L}_h)$ *est* T*–admissible si et seulement si* $\mathbf{T}g \in C_h (R_a, R)$.

b) *Si nous remplaçons dans a) l'hypothèse* (H) *par* (H′) *et h par* 1, *alors pour chaque* $x \in l_g$ *on aura*:

i) $(\| k \| \bullet x) \in \mathcal{L}_1 (R_a, R)$

ii) $(Tx)_1^* = (k \bullet x)_1^*$.

PROPOSITION 4. *Si* $\mathbf{T}g \in l_h$ *alors la paire* (C_g, l_h) *est* T–*admissible.*

PROPOSITION 5. *Sous l'hypothèse* (H'') *la paire* $(\mathfrak{L}_g, l_h)$ *est* T–*admissible si et seulement si* $Tg \in l_h$ *et* $\mathbf{T}g \in C_h(R_a, R)$.

PROPOSITION 6. *Sous l'hypothèse* (H'') *la paire* (l_g, l_h) *est* T–*admissible si et seulement si* $\mathbf{T}g \in C_h(R_a, R)$.

3. Considérons l'équation intégro–fonctionnelle

$$x = (\mathfrak{F}_1 + T\mathfrak{F}_2)\,x \tag{E}$$

où $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ sont deux opérateurs continus sur la sphère S_h ou σ_h et dont les valeurs appartienent à certains espaces qui seront precisés pour chaque théorème qui suit.

Nous allons noter par r_1 et r_2 des nombres positives et par $\|\cdot\|$ la norme de C_1 ou de C_g, quand cette dernière notation ne se prête pas à la confusion.

THÉORÈME 1. *Soit* $\mathfrak{F}_1 : S_1 \to \mathfrak{L}_1$ *et* $\mathfrak{F}_2 : S_1 \to C_g$. *Sous les conditions de la Proposition* 1 *nous supposons que*

i) $\|\mathfrak{F}_i x - \mathfrak{F}_i y\| \le r_i \|x - y\|_1 \qquad \forall x, y \in S_1 \qquad (i = 1, 2),$

ii) $\lambda = 1 - r_1 - \mathbf{C}_1 r_2 > 0$ *et* $\|\mathfrak{F}_1 0\|_1 + \mathbf{C}_1 \|\mathfrak{F}_2 0\|_g \le \lambda\rho$.

Alors l'équation (E) *admet une seule solution* $x \in S_1$. *De plus, cette solution satisfait à la relation,*

$$x^* = (\mathfrak{F}_1 x)^* + (k \bullet \mathfrak{F}_2 x)^* .$$

THÉORÈME 2. a) *Soit* $\mathfrak{F}_1 : S_h \to \mathfrak{L}_h$ *et* $\mathfrak{F}_2 : S_h \to \mathfrak{L}_g$. *Dans les conditions de la Proposition* 2a *nous supposons que,*

i) $\|\mathfrak{F}_i x - \mathfrak{F}_i y\| \le r_i \|x - y\|_h, \qquad \forall x, y \in S_h \qquad (i = 1, 2)$

ii) $\lambda = 1 - r_1 - \mathbf{C}_h r_2 > 0$ *et* $\|\mathfrak{F}_1 0\|_h + \mathbf{C}_h \|\mathfrak{F}_2 0\|_g \le \lambda\rho$.

Alors l'équation (E) *admet une seule solution* $x \in S_h$.

b) *Si nous remplaçons dans a) la « Proposition 2a » par la « Proposition 2 b », alors la solution* $x \in S_1$ *satisfait à la relation,*

$$x_1^* = (\mathfrak{F}_1 x)_1^* + [(Tg)_1^* + (k \bullet g)_1^*]\,(\mathfrak{F}_2 x)_g^* + (k \bullet \mathfrak{F}_2 x)_1^* .$$

THÉORÈME 3. a) *Soit* $\mathfrak{F}_1 : S_h \to \mathfrak{L}_h$ *et* $\mathfrak{F}_2 : S_h \to l_g$. *Si les conditions de la Proposition* 3 a *et les conditions* i) *et* ii) *du Théorème* 2 *sont verifiées, alors l'équation* (E) *admet une seule solution* $x \in S_h$.

b) *Si nous remplaçons dans* a) *la « Proposition 3 a » par la « Proposition 3 b », alors la solution* $x \in S_1$ *satisfait à la relation,*

$$x_1^* = (\mathfrak{F}_1 x)_1^* + (k \bullet \mathfrak{F}_2 x)_1^* .$$

THÉORÈME 4. *Soit* $\mathcal{F}_1 : \sigma_h \to l_h$ *et* $\mathcal{F}_2 : \sigma_h \to C_g$. *Si les conditions de la Proposition 4 et les conditions* i) *et* ii) *du Théorème 2 sont verifiées, alors l'équation* (E) *admet une seule solution* $x \in \sigma_h$.

THÉORÈME 5. *Soit* $\mathcal{F}_1 : \sigma_h \to l_h$ *et* $\mathcal{F}_2 : \sigma_h \to \mathcal{L}_g$. *Si les conditions de la Proposition 5 et les conditions* i) *et* ii) *du Théorème 2 sont verifiées, alors l'équation* (E) *admet une seule solution* $x \in \sigma_h$.

THÉORÈME 6. *Soit* $\mathcal{F}_1 : \sigma_h \to l_h$ *et* $\mathcal{F}_2 : \sigma_h \to l_g$. *Si les conditions de la Proposition 6 et les conditions* i) *et* ii) *du Théorème 2 sont verifiées, alors l'équation* (E) *admet une seule solution* $x \in \sigma_h$.

REMARQUES. 1) Les théorèmes qui affirment l'existence et l'unicité de la solution dans $\mathcal{L}_h$ généralisent pour les équations de la forme (E) certains résultats de [1], [7], [8], [9] et aussi d'autres, comparables à ceux de [6], [14], [15] et [17].

2) Les théorèmes qui affirment l'existence et l'unicité de la solution dans l_h généralisent pour les équations de la forme (E) le théorème bienconnu de Poincaré–Liapounoff, concernant la stabilité asymptotique des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

3) L'appartenance d'une solution de l'équation (E) à l'espace $\mathcal{L}_h$ ou l_h, lui confère un certain genre de comportement asymptotique, intéressant les applications.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. AVRAMESCU, *Sur l'existence des solutions convergentes des systèmes d'équations différentielles non linéaires*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *81*, 147–168 (1969).

[2] GH. BANTAŞ, *Contribution à l'étude des équations intégrales* (thèse, en roumain).

[3] GH. BANTAŞ, *On an asymptotic behavior in the theory of Volterra integro-functional equations* (à paraître).

[4] GH. BANTAŞ, *Sur une comportement à l'infini des solutions des équations intégro-fonctionnelles de Volterra*, « An. Univ. Timişoara Ser. Şti. Mat.-Fiz. » (à paraître).

[5] GH. BANTAŞ, *Volterra integro-functional equations which have solutions with finite limit at infinity*, « Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie » (à paraître).

[6] R. BELLMAN, *On an application of a Banach-Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations*, « Ann. of Math. », *49*, 515–522 (1948).

[7] T. F. BRIDGLAND JR., *Asymptotic behavior of the solution of non-homogeneous differential equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *12*, 546–552 (1960).

[8] T. F. BRIDGLAND JR., *Asymptotic behavior of the solutions of nonlinear differential equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *13*, 373–377 (1962).

[9] W. A. COPPEL, *On the stability of ordinary differential equations*, « J. London Math. Soc. », *39*, 255–260 (1964).

[10] C. CORDUNEANU, *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *67*, 349–363 (1965).

[11] C. CORDUNEANU, *Sur certaines équations fonctionnelles de Volterra*, « Funkcial. Ekvac. », *9*, 119–127 (1966).

[12] C. CORDUNEANU, *Some perturbation problems in the theory of integral equations*, « Math. Systems Theory », *1*, 143–155 (1967).

[13] C. CORDUNEANU, *Admissibility with respect to an integral operator and applications*, « Studies in Appl. Math. », *5*, 55–63 (1969).

[14] T. G. HALLAM, *On the asymptotic growth of the solution of a system of nonhomogeneous linear differential equations*, « J. Math. Anal. Appl. », *25*, 254–265 (1969).

[15] T. G. HALLAM, *Convergence in nonlinear systems*, « Boll. Un. Mat. Ital. », 12–20 (1970).

[16] J. L. MASSERA and J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis*, « Ann. of Math. », *67*, 517–573 (1958).

[17] O. PERRON, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, « Math. Z. », *32*, 703–728 (1930).