Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Antonio Machì

Automorfismi che fissano sottogruppi di Sylow

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.6, p. 835–839.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_835_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Algebra. — *Automorfismi che fissano sottogruppi di Sylow.* Nota di ANTONIO MACHÌ (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — An extension of a Lemma by Gorenstein–Herstein ([1], Lemma 10.4.5) to solvable groups admitting a fixed–point–free automorphism of order r^2, r a prime, is given.

1. Sia G un gruppo finito che ammetta un automorfismo β senza punti fissi, cioè tale che

$$x \in G \quad \text{e} \quad x^\beta = x \Rightarrow x = 1.$$

È noto che, sotto queste condizioni, β fissa uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow di G, per ogni primo p che divida l'ordine di G. Se β ha ordine 4, un Lemma di Gorenstein–Herstein (Lemma 10.4.5 in [1]) afferma che se P è l'unico p–sottogruppo di Sylow di G fissato da β, allora $C_G(\alpha) = \{x \in G \mid x^\alpha = x\}$ normalizza P, dove $\alpha = \beta^2$. Ciò implica che P sia anche l'unico p–sottogruppo di Sylow di G fissato da α, poichè due tali sottogruppi debbono essere coniugati tramite un elemento di $C_G(\alpha)$ (v. § 2 (*b*)). Se ora β ha ordine r^2, r denotando un qualunque numero primo, vogliamo dimostrare, sotto l'ulteriore ipotesi di risolubilità (1), che $\alpha = \beta^r$ fissa uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow per ogni primo p che divide l'ordine di G.

Osserviamo che, per un teorema di Thompson ([1], Theorem 10.2.1), $C_G(\alpha)$ è nilpotente in quanto β ristretto a $C_G(\alpha)$ ha ordine r (o 1, ma in tal caso, per lo stesso Teorema, G stesso è nilpotente), e, se $r = 2$, $C_G(\alpha)$ è addirittura abeliano. Dimostreremo, nel § 4, che se α è un qualunque automorfismo di un gruppo finito G, e se α fissa uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow per ogni primo p che divide l'ordine di G, allora $C_G(\alpha)$ è nilpotente.

2. Riassumiamo alcuni risultati noti, che ci serviranno per la dimostrazione del Teorema. Se $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, con $C_G(\alpha)$ indichiamo l'insieme $\{x \in G \mid x^\alpha = x\}$, cioè l'insieme degli elementi di G fissati da α.

(*a*) Se α ha ordine una potenza di un primo e $C_G(\alpha) = 1$ (cioè α è senza punti fissi), allora:

i) $(|G|, o(\alpha)) = 1$;

ii) α fissa uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow per ogni primo p che divide l'ordine di G;

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 16 giugno 1972.

(1) Non è noto se un gruppo che ammette un automorfismo senza punti fissi di ordine r^2, con r primo dispari, sia necessariamente risolubile o meno.

(*b*) Se $(|G|, o(\alpha)) = 1$, allora:

i) α fissa qualche p–sottogruppo di Sylow per ogni primo p che divide l'ordine di G;

ii) se S_1 e S_2 sono due p–sottogruppi di Sylow di G fissati da α, allora S_1 e S_2 sono coniugati tramite un elemento di $C_G(\alpha)$.

(*c*) Se H è un sottoinsieme di G fissato da α, allora $C_G(H)$ e $N_G(H)$ sono anch'essi fissati da α.

(*d*) Se N è un sottogruppo normale di G e $N^\alpha = N$, e $C_G(\alpha) = 1$, allora $C_{G/N}(\bar{\alpha}) = 1$, dove $(xN)^{\bar{\alpha}} = x^\alpha N$.

Per questi risultati si vedano [1] (Cap. 6 e 10) e [2].

3. TEOREMA. *Sia β un automorfismo senza punti fissi di ordine r^2, con r primo, di un gruppo risolubile* G. *Allora $\alpha = \beta^r$ fissa uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow per ogni p che divida l'ordine di* G.

Dimostrazione. Sia N un sottogruppo normale minimale e β–invariante di G, p un primo fissato che divida l'ordine di G. N sarà un q–gruppo per qualche primo q, non necessariamente distinto da p. L'automorfismo $\bar{\beta}$ indotto da β su G/N ha ordine 1, r o r^2, ed è senza punti fissi. Nel primo caso, G = N, è un q–gruppo e non c'è niente da dimostrare. Trattiamo separatamente i due casi restanti, usando l'induzione sull'ordine di G.

(*a*) Sia $o(\bar{\beta}) = r$. Per il citato teorema di Thompson, G/N è nilpotente, e quindi ammette uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow, che risulta pertanto caratteristico. Allora:

$$(SN/N)^{\bar{\beta}} = SN/N\,,$$

dove S è un p–Sylow di G, e quindi

$$(SN)^{\beta} = SN\,,$$

ed inoltre $SN \trianglelefteq G$. Distinguiamo due sottocasi:

(i) β ha ordine r su SN. In tal caso SN è nilpotente, per cui S è l'unico p–Sylow di SN ed essendo anche p–Sylow di G è anche l'unico p–Sylow di G in quanto $SN \trianglelefteq G$.

(ii) β ha ordine r^2 su SN. Se $SN < G$, per induzione α fissa un solo p–Sylow in SN e quindi in G in quanto $SN \trianglelefteq G$ implica che tutti i p–Sylow di G sono contenuti in SN.

Nel caso (*a*) si può quindi supporre G = SN, dove S è un p–Sylow di G.

(*b*) Sia $o(\bar{\beta}) = r^2$. Per induzione, $\bar{\alpha}$ fissa un unico p–Sylow in G/N, e sia, SN/N, con S p–Sylow di G. Ma ciò accade anche per $\bar{\beta}$, e quindi

$$(SN/N)^{\bar{\beta}} = SN/N\,,$$

da cui

$$(SN)^{\beta} = SN\,.$$

Anche qui distinguiamo due sottocasi:

(i) β ha ordine r su SN. In tal caso α ha ordine 1 su SN, cioè $SN \leq C_G(\alpha)$. Certamente, α fissa S. Se S_1 è un altro p–Sylow di G fissato da α, allora (v. 2 (b, ii)) $S_1 = S^t$ dove $t \in C_G(\alpha)$, e quindi $S_1 \leq C_G(\alpha)$. Ma $C_G(\alpha)$ è nilpotente, e quindi $S = S_1$.

(ii) β ha ordine r^2 su SN. Se $SN < G$, per induzione α fissa un unico p–Sylow in SN e sia S_1. S_1 è anche p–Sylow in G, e se S_2 è un altro p–Sylow di G fissato da α, allora S_1N/N e S_2N/N sono entrambi fissati da $\bar{\alpha}$, e pertanto sono lo stesso p–Sylow di G/N. Ne segue

$$S_1N = S_2N = SN$$

da cui $S_2 \leq SN$ e quindi $S_1 = S_2$, in quanto entrambi fissati da α.

Anche nel caso (b) possiamo dunque supporre $G = SN$, dove S è un p–Sylow di G. Il Teorema sarà allora dimostrato quando lo sia sotto l'ulteriore ipotesi $G = SN$. Consideriamo $O_p(G)$, il massimo p–sottogruppo normale di G. Esso è caratteristico in G. Se β ha ordine r su $G/O_p(G)$, tale gruppo è nilpotente e quindi ammette un unico p–Sylow, $S/O_p(G)$. S è allora l'unico p–Sylow di G. Sia $O_p(G) \neq 1$. Se β ha ordine r^2 su $G/O_p(G)$, per induzione l'automorfismo indotto da α su $G/O_p(G)$ fissa un unico p–Sylow, $S_1/O_p(G)$, e quindi α fissa S_1 unicamente in G.

Possiamo allora supporre $O_p(G) = 1$, cioè che G non abbia p–sottogruppi normali.

Ora, $C_G(\alpha)$ è nilpotente e quindi

$$C_G(\alpha) = P \times Q\,,$$

dove P è un p–gruppo e Q un q–gruppo. Se p non divide l'ordine di $C_G(\alpha)$ si ha $C_G(\alpha) = Q \subseteq N$ e quindi [3, Lemma 1] $G = S \times N$. Ne segue che S è l'unico p–Sylow di G e pertanto α lo fissa. Sia allora $p \,\big|\, |C_G(\alpha)|$, cioè $P \neq 1$, e sia $P = C_G(\alpha) \cap S_1$, con S_1 Sylow in G. Se $S_1 \subseteq C_G(\alpha)$, abbiamo già visto che S_1 è l'unico fissato da α. Sia allora $S_1 \neq P$. P è normale in $C_G(\alpha)$, e, per una nota proprietà dei p–gruppi, $P < N_{S_1}(P)$. Ne segue:

$$C_G(\alpha) < N_G(P)$$

e avendosi $O_p(G) = 1$ è $N_G(P) < G$. P è β–invariante e quindi $N_G(P)$ lo è. Inoltre, β ha ordine r^2 su $N_G(P)$ (altrimenti $N_G(P) \subseteq C_G(\alpha)$, in quanto α avrebbe ordine 1 su $N_G(P)$), e quindi, per induzione, α fissa un unico p–Sylow in $N_G(P)$, e sia P_1. Ora, P_1 è β–invariante: β fissa un unico p–Sylow in $N_G(P)$, e sia P'; poichè allora anche α fissa P', si ha $P_1 = P'$. Inoltre, $P < P_1$, in quanto come abbiamo visto sopra, P è normalizzato da almeno un p–elemento che non appartiene a P. Osserviamo che

$$C_G(\alpha) < N_G(P_1)$$

in quanto, se $x \in C_G(\alpha)$, si ha:

$$(x^{-1}P_1x)^\alpha = (x^\alpha)^{-1}P_1^\alpha x^\alpha = x^{-1}P_1x \subseteq N_G(P)$$

e quindi, essendo P_1 l'unico p–Sylow fissato da α in $N_G(P)$,

$$x^{-1} P_1 x = P_1 ,$$

cioè $x \in N_G(P_1)$. Se P_1 è Sylow in G, e P' è un altro p–Sylow di G fissato da α, deve essere:

$$P_1^t = P' ,$$

con $t \in C_G(\alpha) \subseteq N_G(P_1)$, e quindi $P_1 = P'$, da cui la tesi. Altrimenti, procedendo come sopra, $N_G(P_1)$ è β–invariante e α fissa un unico p–Sylow di $N_G(P_1)$, e sia P_2, con $P_1 < P_2$ e

$$C_G(\alpha) < N_G(P_2) .$$

Si ottiene in questo modo una catena strettamente ascendente di p–sottogruppi $P_0 = P < P_1 < P_2 < \cdots$ tale che:

$$C_G(\alpha) < N_G(P_i) , \qquad i = 0 , 1 , 2 , \cdots .$$

Questa catena deve fermarsi con un p–sottogruppo di Sylow di G, e sia S'. Allora α fissa S', e poichè $C_G(\alpha)$ lo normalizza, S' è l'unico p–sottogruppo di Sylow di G fissato da α. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

4. Dimostriamo ora che la nilpotenza di $C_G(\alpha)$ è condizione necessaria affinchè un automorfismo α di un gruppo G fissi uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow, per ogni primo p che divida l'ordine di G. Il seguente lemma è già stato usato nel corso della dimostrazione del teorema del § 3.

LEMMA. *Sia α un automorfismo di un gruppo* G *che fissa uno ed un solo sottogruppo* H *di ordine m per qualche intero m. Allora*:

$$C_G(\alpha) \subseteq N_G(H) .$$

Dimostrazione. Sia $x \in C_G(\alpha)$. Allora

$$(H^x)^\alpha = (H^\alpha)^x = H^x ,$$

da cui

$$H^x = H ,$$

in quanto $|H^x| = |H|$, q.e.d.

COROLLARIO. *Sia α un automorfismo di un gruppo* G *che fissi uno ed un solo p–sottogruppo di Sylow per ogni primo p che divida l'ordine di* G. *Allora* $C_G(\alpha)$ *è nilpotente.*

Dimostrazione. Sia p un primo che divida l'ordine di $C_G(\alpha)$, S un p–sottogruppo di Sylow di G fissato da α. Per il Lemma,

$$C_G(\alpha) \subseteq N_G(S)$$

e quindi $C_G(\alpha) S$ è un sottogruppo di G nel quale S è un p-sottogruppo di Sylow normale, e quindi unico. Da ciò segue che $C_G(\alpha) \cap S$ è Sylow in $C_G(\alpha)$. Se $x \in C_G(\alpha)$, si ha:

$$(C_G(\alpha) \cap S)^x = C_G(\alpha)^x \cap S^x = C_G(\alpha) \cap S$$

e quindi $C_G(\alpha) \cap S \trianglelefteq C_G(\alpha)$. Da ciò segue la nilpotenza di $C_G(\alpha)$, q.e.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. GORENSTEIN, *Finite groups*, Harper & Row, 1968.

[2] G. GLAUBERMAN, *Fixed points in groups with operator groups*, «Math. Zeit.», *84*, 120–125 (1964).

[3] B. SCIMEMI, *Finite Groups Admitting a Fixed-Point-Free Automorphism*, «Jour. Alg.», *10*, 125–133 (1968).