Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

M. Giovanna Platone Garroni

Teoremi di confronto "forte" per operatori differenziali ellittici del secondo ordine, non necessariamente autoaggiunti, a coefficienti discontinui. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.6, p. 821–828.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_821_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

Matematica. — *Teoremi di confronto «forte» per operatori differenziali ellittici del secondo ordine, non necessariamente autoaggiunti, a coefficienti discontinui* (*). Nota II di M. GIOVANNA PLATONE GARRONI, presentata (**) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — Vedere Nota I.

Saranno qui dimostrati i teoremi di confronto «forte» per soluzioni, già enunciati e illustrati nella prima parte di questo lavoro [14] (1).

La dimostrazione di tali teoremi è preceduta da vari lemmi, alcuni dei quali (lemmi 1.2 e 2.3) sono teoremi di confronto per soprasoluzioni.

Nel corso della trattazione sceglieremo sempre in $\underline{S}(M)$ e $S(M)$ funzioni non negative e in $\bar{\Sigma}(M)$ e $\Sigma(M)$ funzioni positive. Tutti i risultati ottenuti sussistono inalterati o con ovvie modifiche (vedi per esempio osservazione IV, pag. 822) scegliendo in $\underline{S}(M)$ e $S(M)$ funzioni non positive e in $\bar{\Sigma}(M)$ e $\Sigma(M)$ funzioni negative.

§ 1.

Cominciamo col dimostrare un lemma che può essere considerato come una generalizzazione della nota identità di Picone (cfr. [10]).

LEMMA 1.1. – *Se* $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *e* $v \in \bar{\Sigma}(M)$; *allora per ogni costante* $\varepsilon > 0$ *si ha*:

$$\int_\Omega \Big[\alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + 2 \frac{u^2}{v+\varepsilon} \beta_i v_{x_i} + \gamma \frac{u^2}{v+\varepsilon} - \\ - \alpha_{ij}\Big(u_{x_i} - \frac{u}{v+\varepsilon} v_{x_i}\Big)\Big(u_{x_j} - \frac{u}{v+\varepsilon} v_{x_j}\Big)\Big] dx \geq 0 . \tag{5}$$

Dimostrazione. – Poichè u appartiene a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $1/(v+\varepsilon)$ appartiene a $L^\infty(\Omega)$ (cfr. definizione III) e v appartiene a $H^1(\Omega)$, si ha che $u^2/(v+\varepsilon)$ appartiene a $H_0^1(\Omega)$: infatti $u^2/(v+\varepsilon) \in L^2(\Omega)$ e $\left(\frac{u^2}{v+\varepsilon}\right)_{x_i} = 2 u_{x_i} \frac{u}{v+\varepsilon} - \left(\frac{u}{v+\varepsilon}\right)^2 v_{x_i} \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$; $u^2/(v+\varepsilon)$ si può quindi usare come funzione test e si ha:

$$m\left(v, \frac{u^2}{v+\varepsilon}\right) \geq 0$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca di Analisi funzionale del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1972.

(1) La numerazione delle formule del presente lavoro continua la numerazione della citata prima parte [14].

e quindi

$$\int_\Omega \Big[\alpha_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} - \alpha_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + 2\, \frac{u^2}{(v+\varepsilon)}\, \beta_i\, v_{x_i} + \gamma\, \frac{u^2}{v+\varepsilon} + $$

$$+ 2\,\alpha_{ij}\, v_{x_i} u_{x_j}\, \frac{u}{v+\varepsilon} - \alpha_{ij}\, v_{x_i}\, \frac{u^2 v_{x_j}}{(v+\varepsilon)^2}\Big]\, dx \geq 0$$

da cui, tenendo conto che $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i, j = 1, \cdots, n$ (vedi ip. iii in [14]) si ottiene con ovvi passaggi la (5).

OSSERVAZIONE IV. – Se v è una sottosoluzione negativa anzichè soprasoluzione positiva, la (5) sussiste sostituendo $v + \varepsilon$ con $v - \varepsilon$.

LEMMA 1.2. – *Supponiamo che esista una u appartenente a $H_0^1(\Omega)$ tale che $J[u] < 0$; allora $\bar{\Sigma}(M) = \varnothing$.*

Dimostrazione. – Supponiamo che $\bar{\Sigma}(M) \neq \varnothing$ e sia $v \in \bar{\Sigma}(M)$. Poichè possiamo sempre supporre che u appartenga a $L^\infty(\Omega)$ (se così non fosse esisterebbe comunque una $\tilde{u} \in C_0^1(\Omega)$ per cui ancora $J[\tilde{u}] < 0$) ci troviamo nelle ipotesi del lemma 1.1. Per ogni $\varepsilon > 0$ sussiste allora la (5), che si può scrivere nel modo seguente:

$$\int_\Omega \Big[\alpha_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + 2\,\beta_i\, u u_{x_i} + (\gamma + G)\, u^2 - \alpha_{ij}\Big(u_{x_i} - \frac{u}{v+\varepsilon}\, v_{x_i}\Big)\Big(u_{x_j} - \frac{u}{v+\varepsilon}\, v_{x_j}\Big) -$$

$$- 2\,\beta_i\, u\Big(u_{x_i} - \frac{u}{v+\varepsilon}\, v_{x_i}\Big) - G u^2 - \gamma u^2 + \gamma\, \frac{u^2}{v+\varepsilon}\, v\Big]\, dx \geq 0\,;$$

ponendo in (1) di [14] $u_{x_i} - \dfrac{u}{v+\varepsilon}\, v_{x_i} = z_i(\varepsilon)$, $i = 1, \cdots, n$, $z_{n+1} = u$ si ha:

$$J[u] - \int_\Omega Q(z(\varepsilon))\, dx - \int_\Omega \gamma u^2 \Big(1 - \frac{v}{v+\varepsilon}\Big)\, dx \geq 0\,;$$

poichè $0 \leq \dfrac{v}{v+\varepsilon} < 1$ e $Q(z(\varepsilon)) \geq 0$, $\forall \varepsilon$, si ottiene

$$J[u] \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega Q(z(\varepsilon))\, dx \geq 0\,;$$

ma ciò è assurdo in quanto $J[u] < 0$.

Dimostrazione del teorema 1. – Per il lemma 1.2 si ha $\bar{\Sigma}(M) = \varnothing$, quindi anche $\Sigma(M) = \varnothing$ che per la (4) dell'osservazione I in [14] è la stessa cosa della tesi $S(M) = \varnothing$.

Dimostrazione del teorema 1'. – Poichè si ha $V[u] = l(u, u) - J[u]$, da $l(u, u) \leq 0$, $V[u] > 0$ segue $J[u] < 0$, e quindi in virtù del teorema 1 si ha l'asserto.

Come corollario del lemma 1.2 si ottiene immediatamente la seguente proposizione che è anch'essa un teorema di confronto per soprasoluzioni e sottosoluzioni:

COROLLARIO DEL LEMMA 1.2. – *Se esiste una $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $l(u, u) \leq 0$, $V[u] > 0$; allora $\bar{\Sigma}(M) = \varnothing$.*

§ 2.

Alla dimostrazione del teorema 2 premettiamo i seguenti lemmi 2.1, 2.2 e 2.3.

LEMMA 2.1. – *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in \overline{\Sigma}(M)$, $\frac{u}{v} \in L^\infty(\Omega)$; *allora si ha*:

$$\int_\Omega \left[\alpha_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + \gamma u^2 - \alpha_{ij}\left(u_{x_i} - \frac{u}{v}\, v_{x_i}\right)\left(u_{x_j} - \frac{u}{v}\, v_{x_j}\right)\right] dx \geq 0\,. \tag{6}$$

Dimostrazione. – Poichè $\frac{u}{v} \in L^\infty(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ si ha che $\frac{u^2}{v}$ appartiene a $H_0^1(\Omega)$ e si può usare come funzione test; si ha allora $m\left(v\,,\, \frac{u^2}{v}\right) \geq 0$; poichè $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $i\,,j = 1,\cdots,n$, si può scrivere:

$$m\left(v\,,\,\frac{u^2}{v}\right) = \int_\Omega \left[\alpha_{ij}\, v_{x_i}\, \frac{2\, u_{x_j} u}{v} - \alpha_{ij}\, v_{x_i}\, \frac{u^2}{v^2}\, v_{x_j} + \alpha_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} - \alpha_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + \gamma u^2\right] dx =$$

$$= \int_\Omega \left[\alpha_{ij}\, u_{x_i} u_{x_j} + \gamma u^2 - \alpha_{ij}\, u_{x_i}\left(u_{x_j} - v_{x_j}\, \frac{u}{v}\right) + \alpha_{ij}\, v_{x_i}\, \frac{u}{v}\left(u_{x_j} - v_{x_j}\, \frac{u}{v}\right)\right] dx\,;$$

di qui si ha l'asserto (cfr. [11]).

LEMMA 2.2. – *Siano* $u \in \underline{S}(M) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v \in \overline{\Sigma}(M)$; *allora si ha*: 1) $v = tu$, $t > 0$; 2) $m(u\,,\varphi) = 0$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$: *cioè* $u \in S(M)$.

Dimostrazione. – Per ogni fissato k intero positivo consideriamo l'insieme

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : u(x) \geq kv(x)\}\,;$$

evidentemente se $k' > k$ si ha $\Omega_{k'} \subseteq \Omega_k$; a priori possono darsi i due seguenti casi:

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \text{mis}\, \Omega_k > 0$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty} \text{mis}\, \Omega_k = 0$.

Verifichiamo che solo il caso b) si può effettivamente presentare: infatti, se si verificasse il caso *a*), ponendo $\Omega_0 = \bigcap_k \Omega_k$ si avrebbe $\text{mis}\, \Omega_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \text{mis}\, \Omega_k > 0$ e si avrebbe q.o. in $\Omega_0 : v(x) \leq u(x)/k$, $\forall k$, e quindi q.o. in $\Omega_0 : v(x) = 0$; ma poichè v, in quanto appartiene a $\overline{\Sigma}(M)$, è positiva in Ω, si arriverebbe a una contraddizione.

Basta quindi dimostrare il teorema nel caso b). Se $\lim\limits_{k\to\infty} \text{mis}\, \Omega_k = 0$ si possono dare due possibilità:

b') $\forall k$, $\text{mis}\, \Omega_k > 0$;

b'') esiste un $\bar{k} > 0$ per cui $\text{mis}\, \Omega_{\bar{k}} = 0$.

Esaminiamo prima il caso b') e cominciamo col provare che u/v appartiene a $L^\infty(\Omega)$.

Poichè $\lim_{k\to\infty} \operatorname{mis} \Omega_k = 0$, esistono un $\bar{k}$ abbastanza grande e un aperto A tali che $\overset{\circ}{\Omega}_{\bar{k}} \subseteq A \subset \Omega$ (2) e la forma bilineare $m(v, \varphi)$ è coercitiva in $H_0^1(A)$ (cfr. [16], pag. 200). Poniamo

$$w_{\bar{k}}(x) = \begin{cases} u(x) - \bar{k}v(x) & \text{in } \Omega_{\bar{k}} \\ 0 & \text{fuori di } \Omega_{\bar{k}} \end{cases}$$

in particolare $w_{\bar{k}} \geq 0$ in $\Omega_{\bar{k}}$ e $w_{\bar{k}} \in H_0^1(A)$. Ne segue

$$m(u, w_{\bar{k}}) \leq 0$$
$$m(v, w_{\bar{k}}) \geq 0,$$

da cui $m(u - \bar{k}v, w_{\bar{k}}) = m(w_{\bar{k}}, w_{\bar{k}}) \leq 0$.

Poichè la forma m è coercitiva in $H_0^1(A)$, ne segue che $w_{\bar{k}} \equiv 0$ q.o. in $\Omega_{\bar{k}}$ e cioè $u(x) \equiv \bar{k}v(x)$ q.o. in $\Omega_{\bar{k}}$. Si può quindi concludere che u/v appartiene a $L^\infty(\Omega)$.

Proviamo ora la 1). Dato che $\frac{u}{v} \in L^\infty(\Omega)$ si può applicare il lemma 2.1 e si ha la (6)

$$\int_\Omega \left(\alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \gamma u^2\right) dx - \int_\Omega \alpha_{ij} \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i}\right)\left(u_{x_j} - \frac{u}{v} v_{x_j}\right) dx \geq 0.$$

D'altra parte poichè $u \in \underline{S}(M) \cap H_0^1(\Omega)$, e l'operatore M è uniformemente ellittico (vedi ip. i in [14]) si ha:

$$m(u, u) \equiv \int_\Omega (\alpha_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \gamma u^2)\, dx \leq 0$$

$$-\int_\Omega \alpha_{ij} \left(u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i}\right)\left(u_{x_j} - \frac{u}{v} v_{x_j}\right) dx \leq 0.$$

Segue necessariamente che:

$$m(u, u) = 0$$

(7) $$u_{x_i} - \frac{u}{v} v_{x_i} = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega, \qquad i = 1, \cdots n.$$

Le (7) implicano che u/v abbia le derivate parziali prime deboli uguali a zero in Ω, e quindi che $v = tu$ q.o. in Ω, con $t > 0$.

Proviamo ora la 2). Dato che $v = tu$, $t > 0$, si ha

$$0 \leq m(v, \varphi) = tm(u, \varphi) \quad , \quad \forall \varphi \geq 0 \quad , \quad \varphi \in H_0^1(\Omega);$$

poichè d'altronde $u \in \underline{S}(M)$, deve essere

$$m(u, \varphi) \leq 0 \quad , \quad \forall \varphi \geq 0 \quad , \quad \varphi \in H_0^1(\Omega);$$

segue allora che $m(u, \varphi) = 0$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ e cioè $u \in S(M)$.

(2) Possiamo supporre $\overset{\circ}{\Omega}_{\bar{k}}$ (interno di $\Omega_{\bar{k}}$) $\neq \varnothing$; altrimenti $u - \bar{k}w = 0$ in $\Omega_{\bar{k}}$ nel senso di $N^1(\Omega)$ e quindi $\frac{u}{v} \in L^\infty(\Omega)$.

Il teorema è così completamente dimostrato nel caso b').

Esaminiamo ora il caso b''): se esiste un $\bar{k} > 0$ per cui mis $\Omega_{\bar{k}} = 0$, si ha q.o. in $\Omega : \frac{u(x)}{v(x)} \leq \bar{k}$ e quindi $\frac{u}{v}$ appartiene a $L^{\infty}(\Omega)$; il resto della dimostrazione è identico a quello del caso b').

LEMMA 2.3. – *Sia* M *autoaggiunto; se esiste una* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tale che* $u \geq 0$ in Ω, $u \not\equiv 0$, $J[u] \leq 0$; *allora si hanno i due seguenti casi*:

I) $\bar{\Sigma}(M) = \varnothing$; *oppure*

II) $\bar{\Sigma}(M) \equiv S(M) = \{tu , t > 0\}$.

Dimostrazione del lemma 2.3. – Possiamo intanto supporre $J[u] = 0$ poichè se fosse $J[u] < 0$ dal lemma 1.2 seguirebbe $\bar{\Sigma}(M) = \varnothing$ e il teorema sarebbe già dimostrato. Per dimostrare il teorema basta verificare che se esiste una v appartenente a $\bar{\Sigma}(M)$ essa è proporzionale a u ed è M–soluzione.

Sia $v \in \bar{\Sigma}(M)$, dal lemma 1.2 segue che $m(\varphi , \varphi)\ (\equiv J[\varphi]) \geq 0$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Sia $\bar{\lambda} > 0$ tale che per $\lambda \geq \bar{\lambda}$ la forma $m(\varphi , \varphi) + \bar{\lambda}\,(\varphi , \varphi)_{L^2(\Omega)}$ è coercitiva in $H_0^1(\Omega)$ (cfr. [16], pag. 200 e sgg.).

Consideriamo ora il seguente problema

$$(8)\qquad \begin{cases} m(f , \varphi) + \bar{\lambda}(f , \varphi)_{L^2(\Omega)} = T , & \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ & \text{con } \ T \in L^2(\Omega) \\ f \in H_0^1(\Omega) . & \end{cases}$$

È noto che l'operatore associato al problema (8) è dotato di operatore inverso $G_{\bar{\lambda}}$ autoaggiunto e completamente continuo in $L^2(\Omega)$ (cfr. [16], pag. 204 e sgg.). Ne segue che per il primo autovalore μ_1 del problema:

$$(9)\qquad \begin{cases} m(f , \varphi) + \bar{\lambda}(f , \varphi)_{L^2(\Omega)} - \mu\,(f , \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0 , & \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ f \in H_0^1(\Omega) & \end{cases}$$

sussistono le seguenti proprietà:

a) $\mu_1 > 0$

b) $\mu_1 = \text{est.} \inf\limits_{H_0^1(\Omega)} \dfrac{m(\varphi , \varphi) + \bar{\lambda}(\varphi , \varphi)_{L^2(\Omega)}}{\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}}$

c) ogni funzione w di $H_0^1(\Omega)$ per cui si ha:

$$\frac{m(w , w) + \bar{\lambda}(w , w)_{L^2(\Omega)}}{\|w\|^2_{L^2(\Omega)}} = \text{est.} \inf_{H_0^1(\Omega)} \frac{m(\varphi , \varphi) + \bar{\lambda}(\varphi , \varphi)_{L^2(\Omega)}}{\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

è una autofunzione relativa all'autovalore μ_1.

Poichè il seguente problema

$$(10)\qquad \begin{cases} m(f , \varphi) - \lambda(f , \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0 , & \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ f \in H_0^1(\Omega) & \end{cases}$$

è equivalente al (9) ove si ponga $\mu = \lambda + \bar{\lambda}$, se denotiamo con λ_1 il primo autovalore di (10) si ha $\mu_1 = \lambda_1 + \bar{\lambda}$. Poichè $m(\varphi, \varphi) \geq 0$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$, $m(u, u) = 0$, segue da *b*)

$$\lambda_1 = \text{est.} \inf_{H_0^1(\Omega)} \frac{m(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{m(u, u)}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = 0 ,$$

e, quindi, da *c*) che u è una autofunzione per il problema (10) relativa a $\lambda = 0$: cioè $u \in S(M) \cap H_0^1(\Omega)$.

Dal lemma 2.2 segue allora l'asserto.

Dimostrazione del teorema 2. – Poichè $\Sigma(M) \subset \bar{\Sigma}(M)$, per il lemma 2.3 si ha immediatamente che $\Sigma(M)$ o è vuoto o coincide con l'insieme $\{tu , t > 0\}$; dalla (4) dell'osservazione I di [14] segue poi l'asserto.

Dimostrazione del teorema 2'. – Poichè $V[u] = l(u, u) - J[u]$, $l(u, u) \leq 0$ e $V[u] \geq 0$, allora $J[u] \leq 0$; e quindi in virtù del teorema 2 si ha l'asserto.

Come corollari del teorema 2 si ottengono alcune proprietà del primo autovalore $\lambda_1(A)$ del seguente problema di Dirichlet:

$$(11) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_A [\alpha_{ij}\, u_{x_i}\, \varphi_{x_j} + \gamma u \varphi]\, dx - \lambda (u , \varphi)_{L^2(A)} = 0 , & \forall \varphi \in H_0^1(A) \\ u \in H_0^1(A) \end{cases}$$

ove A è un aperto contenuto in Ω eventualmente coincidente con esso.

Gli autovalori di (11) costituiscono una successione $\{\lambda_h(A)\}$ tale che

$$\lambda_h(A) \leq \lambda_{h+1}(A) \quad , \quad \lim_{h \to \infty} \lambda_h(A) = +\infty \qquad \text{(cfr. [16] pag. 203 e sgg.)}$$

e inoltre: $\lambda_h(A) \geq \lambda_h(\Omega)$ (cfr. [13] appendice I) (3).

COROLLARIO 2.1. – *La varietà lineare delle autofunzioni corrispondenti al primo autovalore* $\lambda_1(A)$ *ha dimensione uno (cioè* $\lambda_1(A)$ *è semplice).*

Dimostrazione. In virtù del teorema 6.1 di [5] esiste una autofunzione v_1 corrispondente a $\lambda_1(A)$ positiva in A. Supponiamo che $\lambda_1(A)$ non sia semplice; esiste allora una autofunzione w_1 ortogonale a v_1; la w_1 cambia quindi di segno in A; denotiamo con A_1 l'aperto non vuoto non coincidente con A tale che: $w_1 > 0$ in A_1, $w_1 < 0$ in $A - A_1$. Se poniamo

$$\bar{w}_1 = \begin{cases} w_1 & \text{in } A_1 \\ 0 & \text{fuori di } A_1 , \end{cases}$$

(3) I corollari seguenti 2.1 e 2.2 sono stati aggiunti in bozze dopo aver visto il lavoro [2], dove tali risultati sono ottenuti in un caso più generale del nostro (equazioni non autoaggiunte). Abbiamo tuttavia ritenuto opportuno mostrare come nel nostro caso si ottengano immediatamente dal teorema 2.

si ha in particolare: $\bar{w}_1 > 0$ in A_1, $\bar{w}_1 \in H_0^1(A_1)$, e

$$\int_{A_1} [\alpha_{ij}(\bar{w}_1)_{x_i}(\bar{w}_1)_{x_j} + \gamma \bar{w}_1^2]\, dx - \lambda_1(A)(\bar{w}_1, \bar{w}_1)_{L^2(A_1)} = 0\,;$$

poiché d'altronde si ha: $v_1 \in H^1(A_1)$ e

$$\int_{A_1} [\alpha_{ij}(v_1)_{x_i}\varphi_{x_j} + \gamma v_1 \varphi]\, dx - \lambda_1(A)(v_1, \varphi)_{L^2(A_1)} = 0\,, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(A_1)\,,$$

dal teorema 2 seguirebbe che v_1 o cambia di segno in A_1 o è proporzionale a $\bar{w}_1$; ma questo è assurdo poiché $v_1 > 0$ in A.

COROLLARIO 2.2. – *Se* $A \subset \Omega$, $A \neq \Omega$; *allora* $\lambda_1(A) > \lambda_1(\Omega)$.

Dimostrazione. – Siano $u_1 \in H_0^1(A)$ e $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ tali che:

$$\int_{A} [\alpha_{ij}(u_1)_{x_i}\varphi_{x_j} + \gamma u_1 \varphi]\, dx - \lambda_1(A)(u_1, \varphi)_{L^2(A)} = 0\,, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(A)$$

$$\int_{\Omega} [\alpha_{ij}(v_1)_{x_i}\varphi_{x_j} + \gamma v_1 \varphi]\, dx - \lambda_1(\Omega)(v_1, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0\,, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Per il corollario 2.1 e il teorema 6.1 di [5] si ha: $u_1 > 0$ in A, $v_1 > 0$ in Ω. Supponiamo $\lambda_1(A) = \lambda_1(\Omega)$; poiché si ha: $v_1 \in H^1(A)$ e

$$\int_{A} [\alpha_{ij}(v_1)_{x_i}\varphi_{x_j} + \gamma v_1 \varphi]\, dx - \lambda_1(\Omega)(v_1, \varphi)_{L^2(A)} = 0\,, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(A)\,,$$

il teorema 2 può essere applicato a u_1 e v_1 in A e si dovrebbe concludere che v_1 o cambia di segno in A o è proporzionale a u_1. Ma questa conclusione contraddice la positività di v_1 in Ω.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. ALLEGRETTO, *A comparison theorem for non linear operators*, «Ann. Scuola Norm. di Pisa», 25 (1), 41–46 (1971).

[2] M. CHICCO, *Some properties of the first eigenvalue and the first eigenfunction of linear second order elliptic partial differential equations in divergence form*, «Boll. U.M.I.», serie IV, 5 (2), 245–254 (1972).

[3] J. B. DIAZ e J. R. MCLAUGHLIN, *Sturm separation and comparison theorems for ordinary and partial differential equations*, «Atti Acc. Naz. dei Lincei», serie VIII, 9 (5), 135–194 (1969).

[4] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, «Mem. Acc. Scienze di Torino», serie III, 25–43 (1957).

[5] M. G. KREIN e W. H. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, in AA. VV., *Functional Analysis and Measure Theory*, Translations – series 1, vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence 1962 (pp. 199–325).

[6] K. KREITH, *A strong comparison theorem for selfadjoint equations*, «Proc. Amer. Math. Soc.», 19, 989–990 (1968).

[7] K. KREITH, *A remark on a comparison theorem of Swanson*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *20*, 549–550 (1969).

[8] K. KREITH, *Sturmian theorems and positive resolvents*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *159*, 319–327 (1969).

[9] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA e H. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », *17* (1–2), 44–79 (1963).

[10] M. PICONE, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende una equazione differenziale del secondo ordine*, « Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa », *11*, 3–24 (1910).

[11] M. G. PLATONE GARRONI, *Una generalizzazione dell'identità di Picone a operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti discontinui*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *57* (3–4), 133–138 (1969).

[12] M. G. PLATONE GARRONI, *Teoremi di confronto per soprasoluzioni rispetto a operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti discontinui in aperti illimitati*, « Boll. U.M.I. », *3* (3), 362–374 (1970).

[13] M. G. PLATONE GARRONI, *Su alcune proprietà degli insiemi nodali delle autofunzioni di operatori ellittici del secondo ordine autoaggiunti a coefficienti discontinui*, « Ricerche di Mat. », *19*, 258–268 (1970).

[14] M. G. PLATONE GARRONI, *Teoremi di confronto « forte » per operatori differenziali ellittici del secondo ordine, non necessariamente autoaggiunti, a coefficienti discontinui*, Nota I, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *52* (5), 611–616 (1972).

[15] M. H. PROTTER, *A comparison theorem for elliptic equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *10*, 296–299 (1959).

[16] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, « Ann. Inst. Fourier », *15*, 189–259 (1965).

[17] C. A. SWANSON, *A comparison theorem for elliptic differential equations*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *17*, 611–616 (1966).

[18] C. A. SWANSON, *Comparison theorems for elliptic equations on unbounded domains*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *126*, 278–285 (1967).

[19] C. A. SWANSON, *An identity for elliptic equations with applications*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *134*, 325–333 (1968).