Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'inéquation d'évolution de Navier-Stokes. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **52** (1972), n.6, p. 811–820.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1972_8_52_6_811_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1972.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 16 giugno 1972

Preside il Presidente BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Sur l'inéquation d'évolution de Navier–Stokes.* Nota III di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema 4, enunciato nella Nota I, e si da un esempio di applicazione dei Teoremi 3 e 4, enunciati nella Nota I.

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.

Soit n un entier positif; considérons le problème

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \Big\rangle + \nu a(u(t), v(t) - u(t)) + \\
& + b(u(t), u(t), v(t) - u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \Big\} dt \geq \\
& \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \}, \qquad t_1, t_2 \in [-n, +\infty[\\
& \forall v(t) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(-n, +\infty; V) \quad \text{avec} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(-n, +\infty; H) \\
& v(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [-n, +\infty[\\
& u(t) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(-n, +\infty; V) \cap C(-n, +\infty; H) \qquad u(t) \in \mathbf{K} \\
& \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [-n, +\infty] \quad , \quad u(-n) = 0 .
\end{aligned}
$$

De (2,27) on a que le problème (3,1) a une solution $u_n(t)$.

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1972.

Démontrons maintenant des éstimations sur $u_n(t)$. Posons dans (3,1) $v(t) = 0$; on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \{-\nu a(u_n(t), u(t)) + \langle f(t), u_n(t)\rangle\} \, dt \geq \frac{1}{2} \{|u_n(t_2)|^2 - |u_n(t_1)|^2\}. \tag{3.2}$$

Posons $M = \sup\limits_{\mathbf{R}} \|f(t)\|^*$; on a

$$\frac{1}{2} \{|u_n(t_2)|^2 - |u_n(t_1)|^2\} \leq \int_{t_1}^{t_2} (M - \nu\alpha |u_n(t)|) \|u_n(t)\| \, dt. \tag{3.3}$$

De (3,3) par le même procédé de [3], on a

$$|u_n(t)| \leq \frac{M}{\nu\alpha} \qquad \int_t^{t+1} \|u_n(s)\|^2 \, ds \leq c \tag{3,4}$$

p.p. sur $[-n, +\infty[$.

Indiquons encore par $u_n(t)$ la prolongée à $\mathbf{R}$ de $u_n(t)$ par 0 et démontrons qu'on peut extraire de $u_n(t)$ une sous-suite de fonctions equicontinues.

Soit $t_1 \in [-n, +\infty[$ avec $u_n(t_1) \in V$; posons $v(t) = u_n(t_1)$ dans (3,1); on a, $t_1 \leq t_2$,

$$\frac{1}{2} |u_n(t_1) - u_n(t_2)|^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} \{\nu a(u_n(t), u_n(t_1)) + \tag{3,5}$$

$$+ b(u_n(t), u_n(t), u_n(t_1)) - \langle f(t), u_n(t_1) - u_n(t)\rangle\} \, dt.$$

De (3,5) par la même méthode utilisée au Théorème précédent on démontre que, fixé σ positif arbitraire, il y a δ_0, qui depende de σ et de $\|u_n(t_1)\|$, tel que

$$|u_n(t_1 + \delta) - u_n(t_1)|^2 \leq \sigma$$

$0 \leq \delta \leq \delta_0$ et δ_0 ne depende pas de n.

Posons maintenant

$$w_\delta(t) = \frac{u(t+\delta) - u(t)}{2}$$

$$\theta_\delta(t) = \frac{u(t+\delta) + u(t)}{2}$$

$$\eta \frac{d}{dt} \theta_{\delta\eta}(t) + \theta_{\delta\eta}(t) = \theta_\delta(t)$$

$$\theta_{\delta\eta}(t_1) = \theta_\delta(t_1).$$

On a, [8],

$$\lim_{\eta \to 0} \theta_{\delta\eta}(t) = \theta_\delta(t) \tag{3,6}$$

dans $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(-n\,,+\infty\,;\mathrm{V})$ et dans $\mathrm{C}_{\text{loc}}(-n\,,+\infty\,;\mathrm{H})$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta_{\delta\eta}(t)\in\mathcal{L}^2_{\text{loc}}(-n\,,+\infty\,;\mathrm{H})$$

$$\theta_{\delta\eta}(t)\in\mathbf{K}\quad\text{p.p.}\qquad\text{sur}\quad[-n\,,+\infty[$$

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta_{\delta\eta}(t)\,,\,\theta_{\delta\eta}(t)-\theta_\delta(t)\right\rangle\leq 0\,.$$

Considérons les deux rélations

$$\begin{aligned}(3,7)\qquad&\int_{t_1}^{t}\Big\{\Big\langle\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(s)\,,\,v(s)-u_n(s+\delta)\Big\rangle+\nu a(u_n(s+\delta)\,,\,v(s)-u_n(s+\delta))+\\&+b(u_n(s+\delta)\,,\,u_n(s+\delta)\,,\,v(s))-\langle f(s+\delta)\,,\,v(s)-u_n(s+\delta)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}s\geq\\&\geq\frac{1}{2}\{|v(t)-u_n(s+\delta)|^2-|v(t_1)-u_n(t_1+\delta)|^2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3,8)\qquad&\int_{t_1}^{t}\Big\{\Big\langle\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(s)\,,\,v(s)-u_n(s)\Big\rangle+\nu a(u_n(s)\,,\,v(t)-u_n(s))-\\&-b(u_n(s)\,,\,u_n(s)\,,\,v(s))-\langle f(s)\,,\,v(s)-u_n(s)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}s\geq\\&\geq\frac{1}{2}\{|v(s)-u_n(s)|^2-|v(t_1)-u_n(t_1)|^2\}.\end{aligned}$$

Posons $v(t)=\theta_{\delta\eta}(t)$; de (3,7) et (3,8) on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t}\Big\{\frac{\nu}{2}a(u_n(s+\delta)\,,\,\theta_{\delta\eta}(s)-u_n(s+\delta))+\frac{\nu}{2}a(u_n(s)\,,\,\theta_{\delta\eta}(s)-u_n(s))+\\&+\frac{1}{2}b(u_n(s+\delta)\,,\,u_n(s+\delta)\,,\,\theta_{\delta\eta}(s)-u_n(s+\delta))+\\&+\frac{1}{2}b(u_n(s)\,,\,u_n(s)\,,\,\theta_{\delta\eta}(s)-u_n(s))-\frac{1}{2}\langle f(s)\,,\,\theta_{\delta\eta}(s)-u_n(s)\rangle+\\&+\frac{1}{2}\langle f(s+\delta)\,,\,\theta_{\delta\eta}(s)-u_n(s+\delta)\rangle\Big\}\,\mathrm{d}s\geq\\&\geq\frac{1}{2}\{|\theta_{\delta\eta}(t)-u_n(t+\delta)|^2+|\theta_{\delta\eta}(t)-u_n(t)|^2-\\&-|\theta_{\delta\eta}(t_1)-u_n(t_1+\delta)|^2-|\theta_{\delta\eta}(t_1)-u_n(t_1)|^2\};\end{aligned}$$

dont, en passant à la limite pour $\eta\to 0$, on a

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t}\{-\nu a(w_\delta(s)\,,\,w_\delta(s))+b(u_n(s+\delta)\,,\,u_n(s+\delta)\,,\,w_\delta(s))-\\&-b(u_n(s)\,,\,u_n(s)\,,\,w_\delta(s))-\langle f(s+\delta)-f(s)\,,\,u(s+\delta)-u(s)\rangle\}\,\mathrm{d}s\geq\\&\geq\frac{1}{2}\{|w_\delta(t)|^2-|w_\delta(t_1)|^2\}.\end{aligned}$$

Par des procédés analogues à ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 3, on a

$$\frac{1}{2}\,|w_\delta(t)|^2 \leq \frac{\sigma^2}{4} + \int_{t_1}^{t} \{-\nu\,\|w_\delta(s)\|^2 + b\,(w_\delta(s), u_n(s), w_\delta(s)) -$$

$$-\langle f(s+\delta) - f(s), u(s+\delta) - u(s)\rangle\}\,ds \leq \frac{\sigma^2}{4} +$$

$$+ c_2 \int_{t_1}^{t} \|u_n(s)\|^2\,|w_\delta(s)|^2\,ds - \int_{t_1}^{t} \langle f(s+\delta) - f(s), u_n(s+\delta) - u_n(s)\rangle\,ds\,.$$

Fixé t, qui varie dans un interval borné, on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\int_{t_1}^{t} \langle f(s+\delta) - f(s), u_n(s+\delta) - u_n(s)\rangle\,ds \leq \frac{\sigma^2}{4}$$

pour $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

On a alors

$$\frac{1}{2}\,|w_\delta(t)|^2 \leq \frac{\sigma^2}{2} + c_1 \int_{t_1}^{t} \|u_n(s)\|^2\,|w_\delta(s)|^2\,ds.$$

Du lemme de Gronwall, [2] pag. 135, on a

$$\frac{1}{2}\,|w_\delta(t)|^2 \leq \frac{\sigma^2}{2}\,e^{2c_1\int_{t_1}^{t}\|u(s)\|^2\,ds}\;;$$

dont, dans $[t_1, t_1 + 2]$, on a

$$|w_\delta(t)| \leq \frac{\sigma^2}{2}\,e^{4c_1c}$$

et

$$|u_n(t+\delta) - u_n(t)| \leq \frac{\sigma^2}{2}\,e^{4c_1c}$$

pour $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

Étant $\int_{t}^{t+1} \|u_n(s)\|^2\,ds \leq c$, il y a dans chaque interval $[t, t+1]$ un point $\bar{t}$, tel que $\|u_n(\bar{t})\| \leq \sqrt{c}$.

On peut alors découper l'interval $[-n, +\infty[$ dans des intervals partiels de mesure 2 et ainsi conclure que les $u_n(t)$ sont equicontinues sur $\mathbf{R}$.

De (3,4) et du Lemme 1 [3], on peut supposer, alors, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{H})\,. \tag{3,9}$$

De (3,4) on peut aussi supposer, sans perdre de généralité,

(3,10) $$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(t_1, t_2; \mathrm{V}) \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

De (3,9) on déduit, fixé $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$,

(3,11) $$\lim_{n\to\infty} |v(t_i) - u_n(t_i)|^2 = |v(t_i) - u(t_i)|^2 \qquad i = 1, 2$$

(3,12) $$\lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t), v(t) - u_n(t) \right\rangle \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t), v(t) - u(t) \right\rangle \mathrm{d}t.$$

De (3,10) on déduit que

(3.13) $$\lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} a(u_n(t), v(t))\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} a(u(t), v(t))\, \mathrm{d}t$$

(3,14) $$\min\lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} a(u_n(t), u_n(t))\, \mathrm{d}t \geq \int_{t_1}^{t_2} a(u(t), u(t))\, \mathrm{d}t$$

(3,15) $$\lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u_n(t)\rangle\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u(t)\rangle\, \mathrm{d}t.$$

De (3,10) on a

(3,16) $$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_{n1}(t, x)\, u_{n2}(t, x) = \chi_{1,2}(t, x)$$

dans $\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; \mathfrak{L}^2(\Omega))$ et

$$\lim_{n\to\infty} u_{1n}(t, x)\, u_{2n}(t, x) = u_1(t, x)\, u_2(t, x)$$

p.p. dans $[t_1, t_2] \times \Omega$; donc, [8] pag. 12,

(3,17) $$\chi_{12}(t, x) = u_1(t, x)\, u_2(t, x).$$

De (3,16) (3,17) on a

(3,18) $$\int_{t_1}^{t_2} b(u_n(t), u_n(t), v(t) - u_n(t))\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} b(u_n(t), u_n(t), v(t))\, \mathrm{d}t \to$$

$$\to \int_{t_1}^{t_2} b(u(t), u(t), v(t))\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} b(u(t), u(t), v(t) - u(t))\, \mathrm{d}t.$$

De (3,11) (3,12) (3,13) (3,14) (3,15) (3,16) (3,17) on peut conclure que $u(t)$ est solution de (1,4) et on a en plus

$$(3,19) \qquad |u(t)| \leq \frac{M}{\alpha\nu} \qquad \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 \, ds \leq c .$$

Démontrons maintenant que si $M < (\nu\alpha)^2$, $u(t)$ est l'unique solution de (1,4) avec $\sup_{\mathbf{R}} |u(t)| < \nu\alpha$.

Supposons qu'il y a deux solution $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de (1,4), telles que $|u_1(t)|, |u_2(t)| < \nu\alpha$.

Posons, fixé t_1, t_2,

$$w(t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{2}$$

$$\theta(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2}$$

$$\eta \frac{d}{dt} \theta_\eta(t) + \theta_\eta(t) = \theta(t)$$

$$\theta_\eta(t_1) = \theta(t_1).$$

On a

$$\lim_{\eta \to 0} \theta_\eta(t) = \theta(t)$$

dans $\mathfrak{L}^2(t_1, t_2; V)$ et dans $C(t_1, t_2; H)$

$$\theta_\eta(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad [t_1, t_2]$$

$$\frac{d}{dt} \theta_\eta(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$\left\langle \frac{d}{dt} \theta_\eta(t), \theta_\eta(t) - \theta(t) \right\rangle \leq 0 .$$

Posons dans (1,4) $v(t) = \theta_\eta(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \left\langle \frac{d}{dt} \theta_\eta(t), \theta_\eta(t) - u_1(t) \right\rangle + \nu a(u_1(t), \theta_\eta(t) - u_1(t)) +$$
$$+ b(u_1(t), u_1(t), \theta_\eta(t) - u_1(t)) - \langle f(t), \theta_\eta(t) - u_1(t) \rangle \Big\} dt \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} \{ |\theta_\eta(t_2) - u_1(t_2)|^2 - |\theta_\eta(t_1) - u_1(t_1)|^2 \}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \left\langle \frac{d}{dt} \theta_\eta(t); \theta_\eta(t) - u_2(t) \right\rangle + \nu a(u_2(t), \theta_\eta(t) - u_2(t)) +$$
$$+ b(u_2(t), u_2(t), \theta_\eta(t) - u_2(t)) - \langle f(t), \theta_\eta(t) - u_2(t) \rangle \Big\} dt \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} \{ |\theta_\eta(t_2) - u_2(t_2)|^2 - |\theta_\eta(t_1) - u_2(t_1)|^2 \},$$

dont

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \frac{\nu}{2} a(u_1(t), \theta_\eta(t) - u_1(t)) + \frac{\nu}{2} a(u_2(t), \theta_\eta(t) - u_2(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} b(u_1(t), u_1(t), \theta_\eta(t) - u_1(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} b(u_2(t), u_2(t), \theta_\eta(t) - u_2(t)) - \langle f(t), \theta_\eta(t) - \theta(t)\rangle \Big\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \{ |\theta_\eta(t_2) - u_1(t_2)|^2 + |\theta_\eta(t_2) - u_2(t_2)|^2 -$$

$$- |\theta_\eta(t_1) - u_1(t_1)|^2 - |\theta_\eta(t_1) - u_2(t_1)|^2 \}.$$

En passant à la limite pour $\eta \to 0$ on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ -\nu a(w(t), w(t)) + b(u_1(t), u_1(t), w(t)) -$$

$$- b(u_2(t), u_2(t), w(t))\} dt \geq \frac{1}{2} \{ |w(t_2)|^2 - |w(t_1)|^2 \}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ -\nu \|w(t)\|^2 + b(w(t), u_1(t), w(t))\} dt \geq \frac{1}{2} \{ |w(t_2)|^2 - |w(t_1)|^2 \}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (-\nu a |w(t)| + |u_1(t)| \, |w(t)|) \, \|w(t)\| \, dt \geq \frac{1}{2} \{ |w(t_2)|^2 - |w(t_1)|^2 \}.$$

Il y a alors $\xi > 0$ tel que

$$\int_{t_1}^{t_2} \xi \, |w(t)| \, \|w(t)\| \, dt \geq \frac{1}{2} \{ |w(t_2)|^2 - |w(t_1)|^2 \}$$

dont, par la même méthode utilisée par l'A. dans [4], on a $w(t) = 0$ et la thèse est ainsi démontrée.

Démontrons maintenant la partie concernante la presque périodicité par une méthode classique [1].

Démontrons que pour toutes suites $\{l_n\}$ réelles, il y a une sous-suite $\{l'_n\}$, telle que

$$\lim_{n \to \infty} u(t + l'_n) = u_l(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{H});$$

ainsi la presque périodicité de $u(t)$ dans H sera démontrée.

De la partie précédente de la démostration on déduit que $u(t)$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ dans H, donc la suite $\{u(t + l_n)\}$ est composée de fonctions equicontinues dans H sur $\mathbf{R}$.

Étant $\int_t^{t+1} \|u(s+l_n)\|^2 \, ds \leq c$, pour le Lemme 1 de [3], on peut supposer, sans perdre de généralité

$$\lim_{n\to\infty} u(t+l_n) = u_l(t) \qquad \text{dans} \quad C(t_1, t_2; H)$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u(t+l_n) = u_l(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; V) \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(t+l_n) = f_l(t) \qquad \text{dans} \quad C(\mathbf{R}; H).$$

Supposons maintenant que la thèse soit fausse. Il y a alors deux sous–suites de $\{l_n\}$, $\{l_{k1}\}$ et $\{l_{k2}\}$ et une suite $\{t_k\}$ telles que

$$|u(t_k + l_{k1}) - u(t_k + l_{k2})| \geq \rho > 0.$$

Posons $\gamma_{k1} = t_k + l_{k1}$, $\gamma_{k2} = t_k + l_{k2}$; on a

$$|u(\gamma_{k1}) - u(\gamma_{k2})| \geq \rho > 0. \tag{3,20}$$

Considérons les deux suites $\{u(t+\gamma_{k1})\}$ et $\{u(t+\gamma_{k2})\}$; utilisant le même procédé de la partie précédente, on a qu'on peut supposer sans perdre de généralité

$$\lim_{k\to+\infty} u(t+\gamma_{ki}) = u_{\gamma_i}(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^\infty(t_1, t_2; H)$$

$$\lim_{k\to+\infty}{}^{*} u(t+\gamma_{ki}) = u_{\gamma_i}(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; V) \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(t+\gamma_{ki}) = f_\gamma(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^\infty(\mathbf{R}; H).$$

De ces relations, en utilisant des méthodes dejà utilisée dans une autre partie de la démonstration, on déduit que $u_{\gamma_1}(t)$ et $u_{\gamma_2}(t)$ sont des solutions de l'inéquation

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big\langle \frac{dv}{dt}(t), v(t) - u(t) \Big\rangle + \nu a(u(t), v(t) - u(t)) +$$

$$+ b(u(t), u(t), v(t) - u(t)) - \langle f_\gamma(t), v(t) - u(t) \rangle \Big\} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \}; \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V) \qquad \text{avec} \quad \frac{dv}{dt}(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}; H)$$

$$v(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p.}$$

$$u(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H) \qquad u(t) \in \mathbf{K} \quad \text{p.p.}$$

On a

$$\operatorname*{Sup}_{\mathbf{R}} |u_{\gamma_1}(t)| \quad , \quad \operatorname*{Sup}_{\mathbf{R}} |u_{\gamma_2}(t)| < \nu\alpha$$

Pour la partie de la démonstration concernante l'unicité, on a alors

$$u_{\gamma_1}(t) = u_{\gamma_2}(t) .$$

De (3,20) on a

$$|u_{\gamma_1}(0) - u_{\gamma_2}(0)| \geq \rho > 0 ,$$

donc on tombe dans l'absurde et la thèse est ainsi démontrée.

Par des méthodes analogues à ceux utilisées dans la partie concernante l'unicité, on deduit que $u(t)$ est S^2-presque périodique dans V.

§ 4. UN EXEMPLE D'APPLICATION DES THÉORÈMES 3, 4

Posons

$$\mathbf{K} = \{v(x) \mid v(x) \in V \quad v(x) \geq 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{sur } \Omega\}.$$

Est alors possible appliquer les Théorèmes 3, 4 a (1,3) et (1,4).

Dans ce cas le problème (1,3) est formellement équivalent au problème

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu\Delta u(t, x) + \sum_{i=1}^{2} u_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) = \\
&= f(t, x) - \operatorname{grad} p(t, x) && \text{dans} \quad [0, T] \times \Omega \quad \text{où} \quad u(t, x) \geq 0 \\
&u(t, x) = 0 && \text{ailleurs dans} \quad [0, T] \times \Omega \\
&\operatorname{div} u(t, x) = 0 && \text{dans} \quad [0, T] \times \Omega \\
&u(t, x) = 0 && \text{dans} \quad [0, T] \times \partial\Omega \\
&u(0, x) = u_0(x) && \text{dans} \quad \Omega .
\end{aligned}$$

Le problème (1,4) est formellement équivalent au problème

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \nu\Delta u(t, x) + \sum_{i=1}^{2} u_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) = \\
&= f(t, x) - \operatorname{grad} p(x) && \text{dans} \quad [0, T] \times \Omega \quad \text{où} \quad u(t, x) \geq 0 \\
&u(t, x) = 0 && \text{ailleurs dans} \quad [0, T] \times \Omega \\
&\operatorname{div} u(t, x) = 0 && \text{dans} \quad [0, T] \times \Omega \\
&u(t, x) = 0 && \text{dans} \quad [0, T] \times \partial\Omega \\
&u(0, x) = u_0(x) && \text{dans} \quad \Omega .
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AMERIO et G. PROUSE, *Functional Analysis and almost periodic functions*, Van Nostrand (1971).

[2] BECKENBACH E. F., *Inequalities*, Springer 1969.

[3] BIROLI M., *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques*, « Ann. Mat. pura ed app. », ser. VIII, *88*, 51–70 (1971).

[4] BIROLI M., *Sull'unicità della soluzione limitata di una diseguaglianza variazionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, *48*, 409–411 (1970).

[5] BIROLI M., *Sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche*, «Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa », *25* (1), 1–24 (1971).

[6] BIROLI M., *Ancora sulla perturbazione delle disequazioni d'evoluzione paraboliche – à paraitre*, « Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa ».

[7] BIROLI M., *Sur les solutions bornées ou presque périodiques des équations d'évolution multivoques sur un espace de Hilbert – à paraitre*, « Ricerche di Matematica ».

[8] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier Villars (1969).

[9] PROUSE G., *Soluzioni quasi periodiche dell'equazione di Navier–Stokes in 2 dimensioni*, « Rend. Sem. Padova », *33* (1963).